Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

25	26	27	28	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 07

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ....

Aufgabe 25 (4 Punkte)

(a) Es seien $c > 0$, $\nu \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \psi(x,t) = f(x \cdot \nu - c|\nu|t)$$

eine Lösung der sogenannten linearen Wellengleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta \psi(x,t)$ ist. Hierbei bezeichnet $x \cdot \nu = \sum_{i=1}^n x_i \nu_i$ das $\mathbb{R}^n$-Skalarprodukt und $\Delta f(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t)$ den Laplace-Operator.

(b) Berechnen Sie für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $G(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|^\alpha)$, sowie $\Delta G(x)$. Für welche Werte von α erfüllt G die Laplace-Gleichung $\Delta G = 0$.

Aufgabe 26 (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Man zeige:

(a) f ist eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^2$,

(b) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$ und $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$ existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

(c) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 1$ und $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = -1$.

Aufgabe 27 (4 Punkte) Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz* von F. Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\operatorname{div}(\phi F) = \langle \operatorname{grad} \phi, F \rangle + \phi \operatorname{div} F.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto G(x) := \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$$

(hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ fest).

Bitte wenden!

Aufgabe 28 (4 Punkte) Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ definiert man die *Rotation* von F durch

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.

(b) Ist $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $\operatorname{rot} \nabla \phi = (0, 0, 0)$.

Kann es eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ geben, so dass $\nabla \phi(x) = (x^2 - yz, y^2 - xz, -xy)$? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld F mit $\operatorname{rot} F = x$?

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 01.12.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 09.12.2026, und am Do., 10.12.2026, in den Übungen