Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

21	22	23	24	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 06

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ....

Aufgabe 21 (4 Punkte) Im Folgenden seien (X, d) ein metrischer Raum und K und A zwei nichtleere Teilmengen von X. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A ist dann definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) \coloneqq \inf\{d(x, y) \mid y \in A\},$$

was sich noch wie folgt zur Definition des Abstands zweier Mengen verallgemeinern lässt:

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{\operatorname{dist}(x, A) \mid x \in K\} = \inf\{d(x, y) \mid x \in K,\ y \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

(b) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

(c) Stimmt die Aussage in (b), wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird? Begründen Sie.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei ihre Minkowski-Summe

$$A + B \coloneqq \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Aufgabe 23 (4 Punkte) Es sei $p \in [1, \infty]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugeln in $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ bzw. $(C([0, 1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt sind.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, deren Lipschitz-Konstanten alle kleiner gleich einem festen $L > 0$ sind. Zeigen Sie: Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent, so konvergiert die Folge bereits gleichmäßig.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stetig. Für die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$ von f gelte $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||\widehat{f}(k)| < \infty$. Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 24.11.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 02.12.2026, und am Do., 03.12.2026, in den Übungen