Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

17	18	19	20	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 05

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ....

Aufgabe 17 (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f. Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen $I = [0,2]$ bzw. $J = [2,\infty)$ die Konvergenz gleichmäßig ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(A) = \exp(a) \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und die Potenzen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

Aufgabe 19 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, so dass $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

(b) Verifizieren Sie die Darstellung

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Aufgabe 20 (4 Punkte) Es seien $l \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und l-mal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass eine von k unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^l}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ richtig ist.

Bemerkung und Hinweis: Im Fall $l = 0$ ist eine lediglich stetige und 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gemeint. Partielle Integration führt zum Ziel.

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 17.11.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 25.11.2026, und am Do., 26.11.2026, in den Übungen