Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Jakob Nowicki-Koth M.Sc.

13	14	15	16	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 04

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ....

Aufgabe 13 (4 Punkte) Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

Aufgabe 14 (4 Punkte, Lindelöf'scher Überdeckungssatz) Man zeige, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Um dies einzusehen, vereinige man möglichst große Intervalle um die rationalen Elemente von U.

Aufgabe 15 (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

(a)
$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Q(x) \coloneqq \langle x, Ax \rangle,$$
hierbei seien A eine feste $n \times n$ - Matrix mit reellen Einträgen und $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ausgestattet.

(b)
$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto L(x) \coloneqq 27 \ln(1 + |x|)|x| + 5|x| + 2001,$$
dabei $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ wie in (a).

Hinweis zu Aufgabenteil (b): Ein Blick auf die Aufgabe 36 der vergangenen Analysis I im SoSe 2026 kann sich lohnen.

Aufgabe 16 (4 Punkte) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition: Ist f gleichmäßig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen in (X, d_X) auf Cauchy-Folgen in (Y, d_Y) ab.
(b) Gilt die in (a) genannte Folgerung stets auch dann, wenn f lediglich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist? Begründen Sie.

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 10.11.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 18.11.2026, und am Do., 19.11.2026, in den Übungen