

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
 BLATT 02

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 5 (4 Punkte, Leibniz-Kriterium für Integrale) Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare monoton fallende Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty f(x)e^{ix}dx$ als uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Untersuchen Sie, für welche Wahlen des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \sin(x^\alpha)dx$$

existiert.

Hinweis: Das Ergebnis aus Aufgabe 5 kann sich als hilfreich erweisen.

Aufgabe 7 (4 Punkte) Die *Eulersche Beta-Funktion* wird definiert durch das (ggf. uneigentliche) Integral

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Zeigen Sie:

- (a) $B(x, y)$ konvergiert für alle positiven reellen Zahlen x und y .
- (b) $B(x, y)$ divergiert, falls $x \leq 0$ oder $y \leq 0$.

Aufgabe 8 (4 Punkte) Zeigen Sie für die in Aufgabe 7 definierte Beta-Funktion:

- (a) $B(x, y) = B(y, x)$,
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $B(x, n) = \frac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$.