

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 01

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 1 (4 Punkte) Leiten Sie Rekursionsformeln der Gestalt

$$a_n I_{n+2}(x) = f_n(x) + b_n I_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für die folgenden unbestimmten Integrale her:

(a) $I_n(x) = \int (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx \quad (|x| < 1)$

(b) $I_n(x) = \int \tan^n(x) dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Geben Sie auch Stammfunktionen für spezielle Werte von n an, die es im Prinzip erlauben mit Hilfe der Rekursionsformel $I_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu berechnen.

Hinweis: In Teil (a) führt partielle Integration zum Ziel, für Teil (b) beachte man $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und verwende die Substitutionsregel.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch (ggf. mehrfache) partielle Integration:

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$

(b) $\int x^a \ln(x) dx$

(c) $\int \exp(ax) \sin(x) dx$

(d) $\int \arcsin(x) dx$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Die folgenden Ausdrücke haben exakt die Gestalt $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Geben Sie die zugehörigen Stammfunktionen an.

(a) $\frac{2x}{1+x^4}$

(b) $\frac{\tan^k(x)}{\cos^2(x)}, k \in \mathbb{Z}$

(c) $\frac{1}{x \ln(x)}$

(d) $\cot(x)$

Hinweis: In (b) ist der Fall $k = -1$ gesondert zu behandeln.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale durch geeignete Umformungen der Integranden:

(a) $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$

(b) $\int_3^4 \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} dx$

(c) $\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \cos(x)} dx$

(d) $\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x) dx, n \in \mathbb{N}_0$

Hinweis: In Teil (b) führt eine Partialbruchzerlegung zum Ziel, vgl. hierzu: Winfried Kabblo, Einführung in die Analysis I, Abschnitt 28.

Abgabe: in die entsprechenden Briefkästen bis Di., 20.10.2026, 12.25 Uhr
Besprechung: am Mi., 28.10.2026, und am Do., 29.10.2026, in den Übungen