

Übungen zu Globaler Analysis III

(SoSe 2026)

9. Übungsblatt (12.6.2026)

Abgabe der Lösungen nächsten Freitag, 19.6.2026, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 9.1. Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und K eine kompakte Untergruppe, die einen maximalen Torus T von G enthält. Zeigen Sie für die Eulercharakteristik

$$\chi(G/K) = \#W_G / \#W_K.$$

(35 Punkte)

Übung 9.2. Beweisen Sie mit Hilfe des projektiven Raumes

$$\mathbf{P}^n \mathbf{C} = \mathbf{SU}(n+1) / (\mathbf{SU}(n) \times S^1),$$

dass die Weyl-Gruppen von $\mathbf{SU}(n)$ und $\mathbf{U}(n)$ $n!$ Elemente haben.

(35 Punkte)

Übung 9.3. In $\mathbf{SU}(3)$ sei

$$T_1 := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi-i\psi} \end{array} \right) \right\}$$

und in $\mathbf{SO}(5)$ sei

$$T_2 := \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Diese Tori sind maximal. Berechnen Sie die Wurzeln von $\mathbf{SU}(3)$ (vgl. Übung 8.3) und $\mathbf{SO}(5)$ bzgl. dieser Tori und stellen Sie die zugehörigen infinitesimalen Gewichte graphisch in den Ebenen $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ dar. (10+20 Punkte)

(insges. 100 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2026/Vorlesung.html>