

Übungen zu Globaler Analysis III  
(SoSe 2026)

7. Übungsblatt (29.5.2026)

Abgabe der Lösungen nächsten Freitag, 5.6.2026, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 7.1.** *Bei dieser Übung können Sie als bekannt voraussetzen, dass  $SU(n+2)$  isometrisch auf  $\mathbf{P}^{n+1}\mathbf{C}$  mit der Fubini-Study-Metrik operiert. Sei  $\tilde{Q}^n \subset \mathbf{P}^{n+1}\mathbf{C}$  die komplexe Untermannigfaltigkeit, die als Nullstellenmenge von  $f(x_0, \dots, x_{n+1}) = x_0^2 + \dots + x_{n+1}^2$  definiert ist.*

- a) *Zeigen Sie, dass die Operation von  $SO(n+2)$  auf den Koordinaten des  $\mathbf{P}^{n+1}\mathbf{C}$  die Quadrik  $\tilde{Q}^n$  isometrisch auf sich abbildet.*
- b) *Bestimmen Sie die Isotropiegruppe des Punktes  $(1 : i : 0 : \dots : 0)$ .*
- c) *Zeigen Sie, dass  $\tilde{Q}^n$  ein symmetrischer Raum ist, indem Sie die Punktsymmetrie an einem Punkt nachweisen.*
- d) *Zeigen Sie, dass  $\tilde{Q}^n$  als komplexe Mannigfaltigkeit isomorph zur Quadrik  $Q^n$  ist. (10+10+10+10 Punkte)*

**Übung 7.2.** *Bestimmen Sie mit Hilfe der Bott-Residuenformel folgende Zahlen:*

- a) *Wieviele Schnittpunkte haben 2 generische Geraden in der Ebene?  
(Betrachten Sie das Problem im  $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$  (warum?). Eine Gerade ist die Nullstellenmenge einer linearen Gleichung, also bestimmt durch einen Schnitt in einem gewissen Bündel  $E \rightarrow \mathbf{C}^2$ . Die Schnittmenge zweier Geraden ist die Nullstellenmenge eines Schnittes in  $E \oplus E$ ).*
- b) *Wieviele Geraden in der Ebene gehen durch 2 generische Punkte? (Als Auswertung von charakteristischen Klassen auf dem Raum aller Geraden  $(\cong \mathbf{P}^1\mathbf{C})$  im  $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ ).*
- c) *Wieviele Geraden im  $\mathbf{R}^3$  schneiden 4 gegebene generische Geraden?  
(20+20+20 Punkte)  
(insges. 100 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2026/Vorlesung.html>