Übungen zur Analysis I
(WS 2026/27)
4. Übungsblatt (17.11.2026)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 24.11.2026, 10:30 in der Vorlesung.

Übung 4.1. *Zeigen Sie* $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cup B)$ *für alle nach oben beschränkten Teilmengen* $A, B \subset \mathbf{R}$. *(25 Punkte)*

Übung 4.2. *Sei* $r \neq 0$ *eine rationale Zahl und* $x \in \mathbf{R}$ *irrational. Zeigen Sie, dass* $r + x$ *und* $r \cdot x$ *irrational sind. (10+10 Punkte)*

Übung 4.3. *Seien* $n, m \in \mathbf{N}_0$ *und* $\sqrt{n} \notin \mathbf{Q}$. *Folgern Sie* $\sqrt{n} + \sqrt{m} \notin \mathbf{Q}$. *(25 Punkte)*

Übung 4.4. *Als* **Schreibweise** *für komplexe Zahlen verwenden wir* x *für* $(x, 0)$, $i := (0, 1)$. *Damit ist also* $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$. *Die Rechenoperationen implizieren dann* $i^2 = -1$.

Bestimmen Sie folgende komplexe Zahlen möglichst vereinfacht in der Gestalt $x + iy$ *mit* $x, y \in \mathbf{R}$*:*

a) $\frac{2-i}{1+i}, (5-i)^2, (3+2i)^2$,

b) Alle Lösungen $z \in \mathbf{C}$ *der Gleichung* $z^2 + (1-3i)z + i - 8 = 0$. *(Sie können mit der pq-Formel heuristisch vermuten, welches die Lösungen sind, und dann beweisen, dass sie welche sind. Dann bleibt noch zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.) (10+20 Punkte)*

(insges. 100 Punkte)