

Abgabe: bis Mittwoch 3.5.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/>

Aufgabe 1 (6 Punkte): Anwendung des PZSes mit Restglied

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ so gibt, dass für alle $y < x$, mit y groß, gilt:

$$\sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} = \log \left(\frac{\log(x)}{\log(y)} \right) + O \left(\exp(-c\sqrt{\log(y)}) \right).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Zur Größe der n -ten Primzahl

Sei $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ die aufsteigende Folge der Primzahlen.

Zeigen Sie für alle hinreichend großen n , dass

(a) $p_n < n(\log(n) + \log \log(n))$,

(b) $p_n > n(\log(n) + \log \log(n) - 1)$.

Hinweis: Nützlich ist die Abschätzung

$$x/\log(x) + x/\log^2(x) < \pi(x) < x/\log(x) + x/\log^2(x) + 3x/\log^3(x),$$

die für große x gilt.

Aufgabe 3 (3 Punkte): PZS im kgV von $1, \dots, n$

Sei $k(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \dots, n$. Zeigen Sie mit dem Primzahlsatz, dass dann

$$k(n) = \exp(n(1 + o(1)))$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Welcher Restterm $o(1)$ ergibt sich mit dem Primzahlsatz mit Restglied in 1. Version?

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$E(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{k(n)}.$$

* **Zusatzfrage** (Zusatzpunkte für richtige Beantwortung): Warum ist $E(1)$ irrational?