Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 3

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 24.4.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Jensensche Ungleichung

Sei f analytisch in einem Gebiet, das die Scheibe $\{z;\ |z| \leq R\}$ enthalte. Es gelte dort $|f(z)| \leq M$ und $f(0) \neq 0$. Weiter sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in der Scheibe $|z| \leq r$ höchstens

$$\frac{\log(M/|f(0)|)}{\log(R/r)}$$

beträgt.

Anleitung: Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen in $|z| \leq R$ gemäß Vielfachheiten. Bilden Sie das Blaschke-Produkt

$$g(z) = f(z) \prod_{k \leq n} \frac{R^2 - z\overline{z_k}}{R(z - z_k)}.$$

Jeder Faktor hat für $|z| = R$ den Betrag 1. Laut Maximumsprinzip folgt $|g(0)| \leq M$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Zum Satz von Borel–Carathéodory

Sei f analytisch in einem Gebiet, das die Scheibe $\{z;\ |z| \leq R\}$ enthalte. Es sei $f(0) = 0$ und es gelte $\Re(f(z)) \leq M$ für $|z| \leq R$. Zeigen Sie durch Anwendung der oberen Schranke

$$\Big|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Big| \leq \frac{2M}{R^k}$$

für $k \geq 1$, die im Beweis des Borel–Carathéodory-Lemmas gezeigt wurde: Falls $|z| \leq r < R$, gilt

$$\Big|\frac{f^{(m)}(z)}{m!}\Big| \leq \frac{2MR}{(R-r)^{m+1}}$$

für $m \geq 1$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zur Nullstellenanzahl im kritischen Streifen

(a) Sei $T > 2$ und $N(T)$ die Anzahl der komplexen Nullstellen ρ von ζ mit $0 < \Re(\rho) < 1$ und $0 < \Im(\rho) < T$. Zeigen Sie mit Lemma 4.9, dass $N(T) = \mathrm{O}(T\log(T))$ gilt.

(b) Leiten Sie Lemma 4.9 aus der Jensenschen Ungleichung her, indem Sie geeignete Scheiben um $2 + i(T + 1/2)$ wählen.