Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 10

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 26.6.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (10 Punkte): Anwendung des großen Siebs

Zeigen Sie:

(a) Sei N groß und p prim mit $3 < p \leq \sqrt{N}$. Sind $6k+1$, $12k+1$ und $18k+1$ jeweils prim, dann gilt $k \not\equiv a\ (p)$ für 3 verschiedene Restklassen a mod p.

(b) Montgomerys großes Sieb zeigt, dass die Anzahl $C(N)$ der natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq N$, für die $6k+1$, $12k+1$ und $18k+1$ simultan prim sind, abgeschätzt werden kann durch

$$C(N) \ll N\Big(\sum_{1\leq q\leq\sqrt{N}} \mu^2(q) \prod_{\substack{p\mid q\\ p>3}} \frac{3}{p-3}\Big)^{-1}.$$

(c) Es gilt die untere Schranke

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{\mu^2(n)}{n} 3^{\omega(n)} \gg \log^3(x),$$

wo $\omega(n) := \#\{p \mid n\}$, und damit $C(N) \ll N \log^{-3}(N)$. (**Hinweis**: AnZ Bl5)

(d) Sind in $n = (6k+1)(12k+1)(18k+1)$ alle drei Faktoren prim, dann ist n eine Carmichael-Zahl, d. h. dass $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ für alle $(a,n) = 1$ gilt. (**Hinweis**: EZ Bl12)

(e) Die Anzahl der Carmichael-Zahlen $\leq X$ der Form in (d) beträgt höchstens $O(X^{1/3} \log^{-3}(X))$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Seien M, N ganzzahlig, $N \geq 1$, sei $0 < \delta < 1$ und seien $x_1, \dots, x_R$ reell derart, dass $\|x_i - x_j\| \geq \delta$ für alle i, j mit $1 \leq i < j \leq R$ gilt. Dabei ist $\|\alpha\| := \min\{|\alpha - y|;\ y \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

(a)

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \Big| \sum_{r=1}^{R} c_r e(nx_r) \Big|^2 \leq N \sum_{r=1}^{R} |c_r|^2 + \mathrm{O}(T(\mathbf{c}, \mathbf{x})),$$

wo

$$T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \sum_{1\leq r<s\leq R} |c_r \overline{c_s}| \cdot \|x_r - x_s\|^{-1}.$$

Hinweis: $\sum_{n\leq X} e(n\alpha) \ll \min(X, \|\alpha\|^{-1})$.

(b) Es gilt die duale From der großen Sieb-Ungleichung, nämlich

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \Big| \sum_{r=1}^{R} c_r e(nx_r) \Big|^2 \leq (N + \mathrm{O}(\delta^{-1}\log(\delta^{-1}))) \sum_{r=1}^{R} |c_r|^2.$$