Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Anwesenheitsblatt 0

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Keine Abgabe! Nur zur Besprechung in den Übungen am 5.4.2023 und 12.4.2023

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Teil A:

Aufgabe 1: Streifenweise Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion

Für $z \in \mathbb{Z}$ sei $D_z = \{s \in \mathbb{C};\ \sigma > z\}$. Man betrachte die ganzen Funktionen

$$h_n(s) := \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(n+t)^s} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \text{ und } f_n(s) := \frac{1}{(n+1)^s} - h_n(s),$$

und zeige damit, dass

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n\geq 1}\int_0^1 \frac{t\ \mathrm{d}t}{(n+t)^{s+1}}$$

auf D_1 und somit auch auf $D_0 \setminus \{1\}$ gilt. Man zeige weiter

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{s}{2!}\Big(\zeta(s+1) - 1\Big) - \frac{s(s+1)}{2!}\sum_{n\geq 1}\int_0^1 \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{(n+1)^{s+2}},$$

so dass ζ demnach holomorph auf $D_{-1} \setminus \{1\}$ ist.
Wie lautet die Formel im nächsten Schritt, mit der sich die Holomorphie von ζ auf $D_{-2} \setminus \{1\}$ ergibt? Kann dies "streifenweise" fortgesetzt werden?

Aufgabe 2: Logarithmische Ableitung von ζ

Es sei $\sigma > 1$. Man zeige $\quad \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \zeta'(s) = -\sum_p \frac{\log(p)}{p^s - 1}$ und damit $\quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

Aufgabe 3: Funktionalgleichung der Zetafunktion

Wie lautet die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ für $s \neq 0, 1$ in der (ausgeschriebenen) symmetrischen Form und in der asymmetrischen Form? Wie werden diese hergeleitet?

Aufgabe 4: Der Wert von ζ bei $1/2$

Zeigen Sie $\quad \zeta(1/2) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$

Teil B:

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit der Regel von de l'Hopital, dass $\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ gilt.

Aufgabe 2:

Es sei $J(x) = \pi(x) + \pi(x^{1/2})/2 + \pi(x^{1/3})/3 + \ldots$. Zeigen Sie $J(x) \sim \mathrm{li}(x)$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass $\pi(x) = \displaystyle\sum_{r \geq 1} \frac{\mu(r)}{r} J(x^{1/r})$.

Aufgabe 4:

Leiten Sie Ramanujans Approximation $\displaystyle\frac{d}{\mathrm{d}x}\pi(x) \approx \frac{1}{x\log(x)} \sum_{r} \frac{\mu(r)}{r} x^{1/r}$ her.

Empfohlene Wiederholungen für Blatt 1:

AnZ 3: partielle Summation, Landau- und Vinogradov-Symbolik

AnZ 4: Grundlegende Sätze für Dirichletreihen

AnZ 8: Eulerscher Produktsatz, unendliche Produkte

AnZ 21: Mertenssätze

Für dieses Blatt außerdem: AnZ 2 (zahlentheoretische Funktionen)

und AnZ 5 (von zahlentheoretischen Funktionen erzeugte Dirichletreihen)