# Algebra – Blatt 9

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

**Abgabe: bis Mittwoch 16.6.2021, 12:10 Uhr**

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

---

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

Sei $R = \mathbb{Q}[X]$ der Polynomring in $X$ über dem Körper der rationalen Zahlen und sei $f \in R$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt genau einen Endomorphismus $\varphi_f$ von $R$ mit $\varphi_f(X) = f$.

(ii) $\varphi_f$ ist ein Automorphismus genau dann, wenn $\deg(f) = 1$.

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Sei $R$ ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $K$ und sei $f \in R[X]$ normiert. Zeigen Sie:

(i) Jeder normierte Teiler $g \in K[X]$ von $f$ liegt bereits in $R[X]$.

(ii) Für $a \in K$ gelte $f(a) = 0$. Dann gilt bereits $a \in R$.

(iii) Ist $a \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle des normierten Polynoms $P = \sum_{i=0}^{d} m_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, so gilt $a \in \mathbb{Z}$ und $a \mid m_0$.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

(i) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad kleiner als 3 in $\mathbb{F}_2[T]$.

(ii) Es sei $K$ ein Körper derart, dass jedes nichtkonstante Polynom in $K[T]$ eine Nullstelle in $K$ besitzt (d. h. $K$ sei algebraisch abgeschlossen). Zeigen Sie, dass $K$ unendlich viele Elemente besitzt.

**Hinweis:** Betrachten Sie das Polynom $(X - x_1) \cdots (X - x_n) + 1$, wenn $x_1, \ldots, x_n$ die Elemente von $K$ wären. Kennen Sie Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge?

**Aufgabe 4 (4 Punkte):**

Sei $R$ ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring und $M$ ein (Links)-$R$-Modul.
Zeigen Sie:

(i) $M$ ist auch ein (Links)-$\mathbb{Z}$-Modul,

(ii) $\mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.

Betrachten Sie den Dualmodul $M^*$ von $M$ über $R$, definiert durch $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $M^*$ ein Rechts-$R$-Modul ist, durch Definition einer geeigneten Abbildung $M^* \times R \to M^*$.

Bitte wenden

**Wissensfragen zu A15 und A16:** (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist ein primitives Polynom?
2.) Wie lautet das Lemma von Gauß über primitive Polynome?
3.) Unter welchen Voraussetzungen ist ein Polynom über einem Integritätsbereich irreduzibel genau wenn es über dem zugehörigen Quotientenkörper irreduzibel ist?
4.) Was sind die Einheiten in einem Polynomring? Welche Koeffizientenringe muss man dafür voraussetzen?
5.) Unter welchen Voraussetzungen ist ein Polynomring $A[X]$ faktoriell?
6.) Wie lautet das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium?
7.) Kennen Sie ein Beispiel für ein Polynom in zwei Unbestimmten, das nach diesem Kriterium irreduzibel ist?
8.) Gibt es Beispiele für Polynome, die zwar nach diesem Kriterium irreduzibel sind, das Kriterium aber nicht unmittelbar anwendbar ist?
9.) Was ist ein $R$-Modul? Wann ist ein solcher Modul ein Vektorraum?
10.) Wie werden dafür Homomorphismen definiert?
11.) Was sind $\mathbb{Z}$-Moduln und ihre Homomorphismen?
12.) Wie werden Linksideale in einem Modul erklärt?
13.) Warum können zyklische Moduln genau mit Faktormoduln (bis auf Isomorphie) identifiziert werden?
14.) Welche Rolle spielt dabei der Annilhilator eines Modulelements?
15.) Wie definiert man Torsionselement, Torsionsteil, Torsionsmodul und torsionsfrei?
16.) Was ist ein freier Modul?
17.) Über welche universelle Eigenschaft verfügt ein freier Modul?
18.) Hat ein freier Modul auch stets eine Basis?
19.) Ist diese Basis stets eindeutig bestimmt?
20.) Was ist der Rang eines freien Moduls?

---

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für Polynome, die irreduzibel nach Eisenstein sind,
2.) für Polynome mit rationalen, nicht ganzzahligen Koeffizienten, die nur ganzzahlige Werte annehmen,
3.) für Ringe, die nicht faktoriell sind,
4.) für Moduln über Hauptidealbereichen, die bislang nicht in der Vorlesung vorgekommen sind.