Algebra – Blatt 8

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 9.6.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Vereinbarung: Auf diesem Übungsblatt seien alle Ringe kommutativ mit 1!

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei R ein Hauptidealbereich und S ein Integritätsbereich, welcher R als Unterring enthält. Zeigen Sie, dass ein ggT zweier Elemente $a, b \in R$ auch ggT in S von a, b ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie: In Hauptidealbereichen sind alle Primideale $\neq 0$ maximal.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring, $p \in R$ mit $0 \neq p \notin R^\times$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) p ist irreduzibel (prim),

(ii) $\forall\, a, b \in R: \ (p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b)$,

(iii) (p) ist Primideal.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien R ein kommutativer Ring, I ein Ideal in R, und $R[X_1, \dots, X_n]$ bzw. $(R/I)[Y_1, \dots, Y_n]$ seien Polynomringe über R bzw. R/I. Sei weiter $\bar{I} := (I)$ das von I in $R[X_1, \dots, X_n]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie:

$$R[X_1, \dots, X_n]/\bar{I} \cong (R/I)[Y_1, \dots, Y_n].$$

Hinweis: Geht “zu Fuß” oder auch nur durch Anwenden der universellen Eigenschaft von Faktor- und Polynomringen.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A13 und A14: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Welche Ideale nennt man Hauptideale?

2.) Welche Ringe bezeichnet man als Hauptidealbereiche?

3.) Was ist ein euklidischer Ring?

4.) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen euklidischen Integritätsbereichen und Hauptidealbereichen?

5.) Warum ist der Polynomring $\mathbb{Z}[T]$ kein Hauptidealbereich?

6.) Welche Elemente eines Integritätsbereiches werden irreduzibel bzw. prim genannt?

7.) Wann heißen zwei Ringelemente eines Integritätsbereiches assoziiert?

8.) Welche Ringelemente eines Integritätsbereiches werden als größter gemeinsamer Teiler zweier Ringelemente a und b bezeichnet?

9.) Ist ein Ringelement als "größter gemeinsame Teiler" eindeutig bestimmt?

10.) Welche Integritätsbereiche nennt man faktoriell?

11.) Mit welchem Kriterium kann man überprüfen, ob ein Integritätsbereich faktoriell ist?

12.) Wie lautet der "Satz von Bézout" für Hauptidealbereiche? Warum ist der Beweis so kurz?

13.) Warum sind Hauptidealbereiche faktoriell?

14.) Sind Polynomringe faktoriell?

15.) Teilt ein Primelement in einem faktoriellen Ring ein Produkt, dann auch einen der Faktoren. Wie zeigt man diese Behauptung?

16.) Wie kann man von einem Element, das in einem faktoriellen Ring mit seiner Primfaktorzerlegung beschrieben werden kann, einen beliebigen Teiler notieren?

17.) Wie definiert man den Unterring $A[x_1, \ldots, x_n]$, der von $x_1, \ldots, x_n \in B$ über A im Ring B erzeugt wird? (A ein Unterring des kommutativen Rings B)

18.) Unter welcher Zusatzbedingung nennt man $A[X_1, \ldots, X_n]$ den Polynomring in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über dem kommutativen Ring A?

19.) Welche universelle Eigenschaft gilt für Polynomringe?

20.) Warum gibt es bis auf Isomorphie genau einen Polynomring in n Unbestimmten über A?

21.) Welche Dimension hat die K-Algebra $K[T]/(f)$, wo $f \neq 0$ ein Polynom ist (d. h. $K[T]/(f)$ als K-Vektorraum betrachtet)?

22.) Warum hat ein Polynom $f \in K[T] \setminus \{0\}$ höchstens $\deg(f)$ viele Nullstellen im Körper K?

23.) Wie lautet der chinesische Restsatz im Polynomring $K[T]$?

24.) Warum ist der allgemeine chinesische Restsatz für Ringe für $K[T]$ anwendbar?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für die Aussage in Aufgabe 4, etwa $I = 2\mathbb{Z}$ in $R = \mathbb{Z}$,

2.) für Ringadjunktionen, die keinen Polynomring ergeben, etwa der Gaußsche Zahlring $R = \mathbb{Z}[i]$ als Unterring von $\mathbb{C}$ (wo $i^2 = -1$) (welche Einheitengruppe hat dieser Ring? Warum ist $2 \in R$ nicht prim?),

3.) für die Anwendung des CRS in $K[T]$ mit einem speziellen Polynom.