hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Algebra – Blatt 3

Abgabe: bis Mittwoch 5.5.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Jede Transposition in S_n ist Produkt von Transpositionen $(i, i+1)$ benachbarter Elemente, mit $1 \leq i < n$.

(ii) S_n wird von den beiden Permutationen (12) und $(123\ldots n)$ erzeugt.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass der Zentralisator von $\sigma = (12\ldots n) \in S_n$ gleich $\langle\sigma\rangle$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Anzahl der zu σ konjugierten Elemente.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass jede Untergruppe H vom Index n in einer Gruppe G einen Normalteiler von G vom Index $\leq n!$ enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Linkstranslation von G auf G/H und den zugehörigen Homomorphismus $G \to \mathrm{Perm}(G/H)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $G \neq e$ eine endliche Gruppe und p der kleinste positive Primteiler der Ordnung von G. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von G vom Index p ein Normalteiler ist.

Hinweis: Hier kann die Aussage von Aufgabe 3 verwendet werden.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A5 und A6: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist ein r-Zyklus in der symmetrischen Gruppe S_n? Wie nennt man 2-Zyklen noch?

2.) Wie kann man jeden r-Zyklus als Produkt von Transpositionen schreiben?

3.) Spielt die Reihenfolge der Verknüpfung elementfremder Zyklen eine Rolle?

4.) Lässt sich jede Permutation in S_n eindeutig als Produkt elementfremder Zyklen schreiben? Geht das auch mit Transpositionen?

5.) Warum ist die Konjugation eines r-Zyklus wieder ein r-Zyklus?

6.) Welche Folge nennt man den Zyklentyp einer Permutation in S_n?

7.) Wie kann man erkennen, ob zwei Permutationen konjugiert zueinander sind?

8.) Welche Zahl nennt man das Signum einer Permuation? Wann ist diese gleich $+1$ bzw. -1?

9.) Welche Permutationen in S_n nennt man gerade, welche ungerade?

10.) Welche Untergruppe von S_n wird die alternierende Gruppe A_n genannt? Ist diese ein Normalteiler? Welchen Index und welche Faktorgruppe erhält man mit A_n in S_n?

11.) Warum bestehen Normalteiler stets aus ganzen Konjugationsklassen?

12.) Welche Gruppe der Ordnung 4 wird Kleinsche Vierergruppe genannt?

13.) Was hat der Felix-Klein-Hörsaal der HHU damit zu tun?

14.) Können Sie ein Erzeugendensystem der alternierenden Gruppe A_n angeben?

15.) Welche Gruppen werden einfach genannt?

16.) Welche der alternierenden Gruppen sind einfach?

17.) Was bezeichnet man als Summe und was als direkte Summe einer Familie B_i von Untergruppen einer abelschen Gruppe A?

18.) Womit kann man die direkte Summe einer endlichen Familie identifizieren?

19.) Welche abelschen Gruppen werden frei genannt?

20.) Was nennt man eine Basis einer freien abelschen Gruppe? Wann nennt man eine solche Gruppe endlich erzeugt?

21.) Inwiefern sind die freien abelschen Gruppen zum Verständnis der endlich erzeugten abelschen Gruppen nützlich?

22.) Haben je zwei Basen einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppen gleichviele Elemente? Was nennt man den Rang einer solchen Gruppe?

23.) Sind Untergruppen einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe vom Rang n frei? Welchen Rang haben diese höchstens?

24.) Warum sind deswegen die Untergruppen einer endlich erzeugten abelschen Gruppe auch wieder endlich erzeugt?

25.) Wann heißt eine abelsche Gruppe torsionsfrei?

26.) Warum sind freie Gruppen torsionsfrei? Unter welcher zusätzlicher Bedingung sind endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppen auch frei?

27.) Welche Untergruppe einer abelschen Gruppe nennt man ihren Torsionsteil?

28.) Wie kann man damit eine beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppe in eine direkte Summe mit zwei Summanden zerlegen? Welche Eigenschaft hat dann der zweite Summand?