Algebra – Blatt 2

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 28.4.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) S_n operiert auf der Menge X aller Teilmengen M von $\{1, \ldots, n\}$ vermöge $T_\sigma(M) = \{\sigma i;\ i \in M\}$. Bestimmen Sie die Bahnen dieser Operation.

(ii) Bestimmen Sie die Bahnen der natürlichen Operation von $\mathrm{GL}(n, K)$ auf K^n (wo $n \in \mathbb{N}$ und K Körper).

Geben Sie jeweils auch die Anzahl der Bahnen an.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) sämtliche Gruppen mit genau zwei Untergruppen.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Seien $\varphi, \psi : G \to H$ Gruppenhomomorphismen, S ein Erzeugendensystem der Gruppe G. Zeigen Sie:

(i) $\varphi(S)$ ist Erzeugendensystem von $\varphi(G)$,

(ii) $\varphi_{|S} = \psi_{|S} \Rightarrow \varphi = \psi$,

(iii) G zyklisch (bzw. abelsch) $\Rightarrow \varphi(G)$ zyklisch (bzw. abelsch).

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien H_1, H_2 Untergruppen von endlichem Index in der Gruppe G. Zeien Sie, dass $H_1 \cap H_2$ von endlichem Index in G ist.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A3 und A4: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine Gruppenoperation?
2.) Ist die Linkstranslation mit einem Gruppenelement a eine Gruppenoperation?
3.) Was ist die Konjugation eines Gruppenelements x mit a? Inwiefern ergibt sich mit dieser (Gruppen-)konjugation eine Gruppenoperation?
4.) Was ist eine Bahn? Zu welcher Äquivalenzrelation sind diese Bahnen die Äquivalenzklassen?
5.) Wann operiert eine Gruppe transitiv auf einer Menge X?
6.) Welche Untergruppe von G nennt man die Isotropiegruppe von x?
7.) Sind Isotropiegruppen stets Normalteiler?
8.) Was besagt die Bahnengleichung? Was nennt man wohl eine Bahnenzerlegung?
9.) Was nennt man den Zentralisator von x?
10.) Was besagt die Klassengleichung?
11.) Was ist eine p-Gruppe? Warum haben p-Gruppen außer e ein nichttriviales Zentrum?
12.) Warum muss eine Gruppe der Ordnung p^2, mit p prim, abelsch sein?
13.) Wie definiert man einen Gruppenhomomorphismus?
14.) Wie ist ein (Gruppen-)Isomorphismus definiert? Warum ist ein Homomorphismus genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist?
15.) Wie sind Endomorphismen bzw. Automorphismen definiert?
16.) Welche Beispiele kennen Sie aus der linearen Algebra?
17.) Was ist die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n, K)$? Wie kann man diese als Kern eines Gruppenhomomorphismus beschreiben?
18.) Was nennt man eine Permutationsgruppe?
19.) Wie kann man den Begriff der Gruppenoperation auf den Begriff eines Gruppenhomomorphismus zurückführen?
20.) Wie lautet der Homomorphiesatz für Gruppen? Was heißt darin "universelle Eigenschaft"?
21.) Wie stehen die Untergruppen einer Gruppe mit den Untergruppen einer Faktorgruppe in bijektiver Beziehung?
22.) Wie lautet der zweite Isomorphiesatz für Gruppen? Was könnte man da "kürzen"?
23.) Welche zyklischen Gruppen kann es bis auf Isomorphie geben?
24.) Welche Untergruppen haben die zyklischen Gruppen?
25.) Gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe der Ordnung n?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für eine Gruppenoperation einer kleinen Gruppe auf eine große Menge X,
2.) für Isotropiegruppen, für eine transitiv operierende Gruppe,
3.) für eine zyklische Gruppe, die keine Restklassengruppe von $\mathbb{Z}$ ist,
4.) für zueinander nichtisomorphe unendliche Untergruppen der additiven oder multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Q}$?
5.) für eine weitere Anwendung des Homomorhiesatzes oder der Isomorphiesätze,
6.) und wie lautet der erste Isomorphiesatz für Gruppen?