Algebra – Blatt 11

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 30.6.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen, $p \neq q$. Zeigen Sie $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$. Finden Sie ferner ein primitives Element für $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})|\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $z = \mathrm{e}^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(z + z^4) : \mathbb{Q}] = 2$ ist.

(iii) Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(z)$ über $\mathbb{Q}(z + z^4)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass Körpererweiterungen vom Grad 2 stets normal sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $f = T^4 - 5 \in \mathbb{Q}[T]$ und $x \in \mathbb{R}$ eine Wurzel von f.

(i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L (mit $L \subseteq \mathbb{C}$) von f über $\mathbb{Q}$. Was ist $[L : \mathbb{Q}]$?

(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $y := x + ix$ über $\mathbb{Q}$ (wobei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$).

(iii) Zeigen Sie, dass die Erweiterungen $\mathbb{Q}(y^2)|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(y)|\mathbb{Q}(y^2)$ normal sind.

(iv) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(y)|\mathbb{Q}$ nicht normal ist.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A19 und A20: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie kann man einen Erweiterungskörper von K so konstruieren, dass ein irreduzibles $f \in K[T]$ darin eine Wurzel besitzt?

2.) Wie stehen zwei Wurzeln des irreduziblen $f \in K[T]$, die in verschiedenen Erweiterungskörpern von K leben, miteinander in Beziehung? Was gilt für die von ihnen erzeugten Erweiterungskörper?

3.) Was genau wird mit der Notation g^σ bezeichnet, wenn $g \in K[T]$ ist und σ ein Körperiso zwischen K und K'?

4.) Wie kann man zu jeder Wurzel x von $f \in K[T]$ (irreduzibel) einen Körperiso $\sigma : K \to K'$ auf $K(x)$ fortsetzen?

5.) Was genau ist ein Zerfällungskörper von f über K?

6.) Was ist der Zerfällungskörper von $T^{23} - 1$ über $\mathbb{Q}$?

7.) Wie kann man den Grad eines Zerfällungskörpers von f über K mit dem Grad des Polynoms abschätzen?

8.) Lassen sich Körperisomorphismen auf Zerfällungskörper fortsetzen?

9.) Wie lässt sich die Eigenschaft, dass L ein ZK von f über K ist, noch anders formulieren?

10.) Wann nennt man eine endliche Körpererweiterung normal?

11.) Was ist ein separables Polynom?

12.) Wie kann man die Separabilität anhand der formalen Ableitung eines Polyoms überprüfen?

13.) Unter welcher Voraussetzung sind irreduzible Polynome stets separabel?

14.) Was ist ein separables Körperelement? Wann heißt eine Körpererweiterung separabel?

15.) Seien die erzeugenden Körperelemente $x_1, \ldots, x_n$ einer Körpererweiterung $L = K(x_1, \cdots, x_n)$ separabel. Was kann kann dann über die Anzahl der Körpereinbettungen von L über einem Iso $\sigma : K \to K'$ gefolgert werden?

16.) Wie kann man an den Erzeugern erkennen, ob $K(x_1, \ldots, x_n)$ separabel ist?

17.) Was nennt man in der Algebra einen perfekten Körper?

18.) Welche Körper sind Beispiele für perfekte Körper?

19.) Welche Körpererweiterungen werden einfach genannt?

20.) Welche Körperelementen heißen dann primitiv?

21.) Wie lautet der Satz vom primitiven Element?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für irreduzible Polynome (etwa mit Eisenstein) und deren Zerfällungskörper,

2.) für Zerfällungskörper mit speziellen p-ten Einheitswurzeln,

3.) für die Zerfällung irreduzibler Polynome g über Zerfällungskörpern, in denen g eine Wurzel hat,

4.) für perfekte Körper, separable und einfache Körpererweiterungen.