# Algebra – Blatt 10

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

**Abgabe: bis Mittwoch 23.6.2021, 12:10 Uhr**

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

---

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

Sei $f(X) = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Zeigen Sie, dass $f$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. (Sie können Aufgabe 2 von Blatt 9 verwenden.)

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von $f$. Schreiben Sie $(z^2 + z + 1)(z^2 + z)$ und $(z-1)^{-1}$ in der Form $az^2 + bz + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Sei $K[X]$ der Polynomring in $X$ über einem Körper $K$, es sei $Y = X^2$ und $Z = X^3$. Zeigen Sie, dass der Ring $K[Y, Z]$ nicht faktoriell ist.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

Sei $L = K(a)$ mit $a$ algebraisch über $K$ von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass $K(a^2) = K(a)$.

**Aufgabe 4 (4 Punkte):**

Seien $K \subseteq L$ Körper, $L|K$ algebraisch. Zeigen Sie, dass jeder Unterring von $L$, der $K$ umfasst, ein Körper ist.

Bitte wenden

**Wissensfragen zu A17 und A18:** (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealbereich?
2.) Was nennt man den $p$-Torsionsteil eines Moduls, und was einen $p$-Modul?
3.) Lässt sich ein endlich erzeugter $p$-Modul in zyklische Teilmoduln zerlegen?
4.) Wie lautet der Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealbereich?
5.) Unterscheidet sich dieser Hauptsatz inhaltlich wesentlich vom Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen?
6.) Welcher dieser Hauptsätze ist stärker?
7.) Inwiefern kann man den Satz über die Jordansche Normalform aus der Linearen Algebra II als Ergebnis des Satzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereiche verstehen?
8.) Wie definiert man die Charakteristik eines Körpers, und was ist der Primkörper eines Körpers?
9.) Was genau ist eine Körpererweiterung und ihr Grad?
10.) Wann spricht man von einer endlichen Körpererweiterung?
11.) Welche Aussage ist mit "Multiplikativität des Körpergrads" gemeint?
12.) Wie konstruiert man den von $x_1, \ldots, x_n$ über $K$ erzeugten Körper?
13.) Wann heißt $x$ ein primitives Element der Körpererweiterung $L$ über $K$?
14.) Wann heißt $x$ algebraisch über $K$? Was ist eine "Wurzel"?
15.) Ist die Kreiszahl $\pi$ algebraisch über $\mathbb{Q}$?
16.) Welches Polynom heißt Minimalpolynom des algebraischen $x$ über $K$?
17.) Was ist der Grad eines algebraischen $x$ über $K$?
18.) Welchen Grad hat die Körpererweiterung $K(x)|K$?
19.) Wann nennt man eine Körpererweiterung $L|K$ algebraisch?
20.) Wie kann man das an einer endlich erzeugten Körpererweiterung überprüfen?
21.) Was nennt man einen "Körperturm"?

---

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für explizite algebraische Zahlen (über $\mathbb{Q}$) samt Minimalpolynomen,
2.) für diverse Zwischenkörper von $\mathbb{C}|\mathbb{Q}$ mittels Körperadjunktionen,
3.) deren Körpergrade (mit dem Multiplikationssatz für Körpergrade in Körpertürmen),
4.) für transzendente (d. h. über $\mathbb{Q}$ nicht algebraische komplexe) Zahlen (außer $\pi$). ☺