Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 6

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 22.11.2021

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

(1) Berechnen Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $163x + 261y = 1$.

(2) Bestimmen Sie die zu $\underline{163}$ inverse Restklasse in $\mathbb{Z}/261\mathbb{Z}$, falls existent.

(3) Lösen Sie die Kongruenz $163x + 5 \equiv 18 \bmod 261$ in $\mathbb{Z}$.

(4) Geben Sie die Einheitengruppen des Ringes $\mathbb{Z}/51\mathbb{Z}$ explizit an.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 4 \bmod 25$, $x \equiv 2 \bmod 64$, $x \equiv 3 \bmod 59$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Ein Ei wiegt 55 g, ein Esslöffel Mehl 10 g, ein Esslöffel Zucker und Butter je 15 g. Es soll ein Rührteig hergestellt werden, der aus gleichen Teilen Eier, Mehl, Zucker und Butter besteht. Es ist noch ein Eigelb (20 g) und ein halbes Päckchen Backpulver übrig, die mitverwendet werden sollen; ein Päckchen Backpulver reicht für 500 g Mehl. Wie lässt sich mit diesen Angaben ein Rührteig abmessen? Dabei sind nur ganzzahlig viele zusätzliche Eier, ganze zusätzliche Backpulverpäckchen und ganzzahlig viele Esslöffel Mehl, Zucker und Butter erlaubt. Eine Kuchenform fasst gut 1.5 kg Teig. Wieviele Kuchen lassen sich aus dem Rührteig backen?

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Zeigen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$, dass der natürliche Homomorphismus

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

surjektiv ist. **Hinweis:** Betrachten Sie den Fall $n = mp$, p prim.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Zeigen Sie die 101-Teilbarkeitsregel:
Eine natürliche Zahl mit der Dezimaldarstellung $[a_{2n+1}a_{2n}\ldots a_1a_0]$, die $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, ist genau dann durch 101 teilbar, wenn ihre alternierende Ziffernpaarsumme $[a_{2n+1}a_{2n}]-[a_{2n-1}a_{2n-2}]+-\ldots(-1)^n[a_1a_0]$ durch 101 teilbar ist.

Bsp.: 304515 ist durch 101 teilbar, da $30 - 45 + 15 = 0$ durch 101 teilbar ist.