

# Einführung in die Zahlentheorie

## Blatt 2

hhu Düsseldorf  
WiSe 2021/22

**Abgabe: bis Montag 25.10.2021**

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/>

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

---

### Aufgabe 1 (4 Punkte):

- (1) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $F_n = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2$ , wobei  $F_m := 2^{2^m} + 1$  die  $m$ -te Fermatzahl bezeichnet.
- (2) Die Folge der  $F_n$  besteht aus paarweise teilerfremden Folgengliedern.

### Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei  $H := \{4m + 1; m \in \mathbb{N}_0\}$ . Wir nennen darin eine Zahl  $H$ -prim, wenn sie nur durch 1 und eine Zahl  $> 1$  in  $H$  teilbar ist.

- (1)  $H$  ist multiplikativ abgeschlossen, d. h.  $u, v \in H \Rightarrow uv \in H$ .
- (2) Geben Sie die ersten zehn  $H$ -primen Zahlen an.
- (3) Der "Satz" von der eindeutigen  $H$ -Primfaktorzerlegung ist nicht korrekt.

### Aufgabe 3 (2 Punkte):

Mit dem Euklidischen Argument und Aufgabe 2 (1) folgt:  
Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form  $4n + 3$ .

**Hinweis:**  $N = 4q_1 \cdots q_s - 1 = 4(q_1 \cdots q_s - 1) + 3$

### Aufgabe 4 (4 Punkte):

Eine ganze Zahl  $n$  heißt quadratfreie Zahl, wenn sie sich nicht durch das Quadrat einer anderen Zahl  $> 1$  teilen lässt.

- (1) Eine natürliche Zahl  $n > 1$  ist genau dann quadratfrei, wenn sie in ein Produkt verschiedener Primzahlen zerlegt werden kann.
- (2) Jede natürliche Zahl  $n > 1$  ist das Produkt einer quadratfreien Zahl mit einer Quadratzahl.

### Aufgabe 5 (4 Punkte):

Bestimmen Sie alle Primzahlzwillinge  $p$  und  $p+2$ , deren arithmetisches Mittel eine Dreieckszahl (der Form  $n(n+1)/2$ ) ist.

### Aufgabe 6 (3 Punkte):

Es seien  $a, m, s, t \in \mathbb{N}$  mit  $m > 1$ .

- (1) Die Zahl  $a^{st} - 1$  ist durch  $a^t - 1$  teilbar.
- (2) Ist  $a^m - 1$  eine Primzahl, so auch  $m$  und es ist  $a = 2$ .

Die Zahlen  $M_p = 2^p - 1$ ,  $p$  Primzahl, heißen Mersennesche Zahlen.

Eine der zur Zeit größten numerisch bekannten Primzahlen ist  $M_{74207281}$  (Entdeckung durch C. Cooper bzw. GIMPS vom 7.1.2016). Berechnen Sie die Anzahl der Dezimalstellen dieser Zahl. Welche Zahl ist die derzeit größte numerisch bekannte Primzahl?