Einführung in die Zahlentheorie
Wiederholungsblatt 14

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: gar nicht! Gemischte Aufgaben, nur zur Klausurvorbereitung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`

<u>14.1</u> Es ist $\left(\frac{14}{29}\right) = \underline{\qquad}$. Daher lässt 14^{14} bei Division durch 29 den Rest $r = \underline{\qquad}$.

<u>14.2</u> $\mathrm{ord}(\underline{2}) = \underline{\qquad}$, $\mathrm{ord}(\underline{22}) = \underline{\qquad}$, $\mathrm{ord}(\underline{5}) = \underline{\qquad}$ in $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^\times$

<u>14.3</u> Die Primzahlen $p > 3$, für die 3 ein quadratischer Rest mod p ist, sind genau die p, welche modulo $m = \underline{\qquad\quad}$ kongruent sind zu $\underline{\qquad\qquad}$.

<u>14.4</u> Eine simultane Lösung der Kongruenzen $8x \equiv 23 \bmod 25$ und $x \equiv 4 \bmod 27$ ist $x = \underline{\qquad\quad}$. Sie ist modulo $\underline{\qquad\quad}$ eindeutig bestimmt.

<u>14.5</u> In $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ hat die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod m$ genau $\underline{\qquad}$ Lösungen für $m = 105$, genau $\underline{\qquad}$ Lösungen für $m = 21$ und genau $\underline{\qquad}$ Lösungen für $m = 5$.

<u>14.6</u> Sei p eine Primzahl > 2, und sei g eine primitive Wurzel mod p.
Dann ist g ein quadratischer $\underline{\qquad\qquad\qquad}$ mod p.
Ist umgekehrt <u>jeder</u> quadratische Nichtrest eine primitive Wurzel mod p, dann ist p von der Gestalt $p = 1 + \underline{\qquad\qquad}$; hätte nämlich $p-1$ einen Primteiler $q \neq 2$, so wäre g^q ein quadratischer Nichtrest, aber keine primitive Wurzel mod p. Denn

$$\left(\frac{g^q}{p}\right) = \underline{\qquad\quad} = (-1)^q = \underline{\qquad\quad} \text{ und } \mathrm{ord}(g^q) = \underline{\qquad\quad} \neq p-1 \text{ in } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times.$$

<u>14.7</u> Ganze Zahlen x, y mit $92x + 125y = 1$ sind $x = \underline{\qquad\quad}$, $y = \underline{\qquad\quad}$.

<u>14.8</u> Die Gruppe $(\mathbb{Z}/3^6\mathbb{Z})^\times$ hat die Ordnung $N = \underline{\qquad\qquad}$.

<u>14.9</u> Wegen $111 = \underline{\qquad\qquad}$ ist $\varphi(111^2)/111 = \underline{\qquad\qquad}$

<u>14.10</u> Die Primzahlen $p > 3$, für welche die Gleichung $x^2 + 3 = py$ lösbar ist mit $x, y \in \mathbb{Z}$, sind genau die p, welche die Kongruenz $\underline{\qquad\qquad\qquad}$ erfüllen.

<u>14.11</u> Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat für $n = 111^2$ genau $\underline{\qquad\quad}$ Einheiten und genau $\underline{\qquad\quad}$ Nullteiler.

<u>14.12</u> Die Kongruenz $r^2 \equiv -1 \bmod 29$ hat genau die beiden Lösungen $\underline{\qquad\qquad}$ mod 29.