Einführung in die Zahlentheorie
Letztes Blatt 13

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 24.1.2022

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n^2 - n + 41$ mit $n \leq 40$ eine Primzahl.

(Hinweis: -163 ist ein quadratischer Nichtrest modulo aller Primzahlen $p < 41$, betrachten Sie dann das Polynom $4n^2 - 4n + 4 \cdot 41$.)

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $6 + 14i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 3 (1 Punkt):

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, gilt $\left(\dfrac{3}{3^n - 2}\right) = (-1)^{n+1}$.

Aufgabe 4 (7 Punkte):

Sei u_k eine Fibonaccizahl mit ungeradem Index k.

(1) Jeder ungerade Teiler von u_k ist kongruent zu 1 mod 4; außerdem ist u_k nicht durch 4 teilbar. (Dazu gehe man z. B. aus von der Relation $u_{2m-1} = u_m^2 + u_{m-1}^2$.)

(2) Folgern Sie aus (1): Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 1 \bmod 4$.

(3) Wie folgt (2) auch aus Aufgabe 3 von Blatt 8?

(4) Es gibt auch unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 4$.

Aufgabe 5 (6 Punkte):

Da F_5 nach Aufgabe 4 von Blatt 9 nur Primteiler $\equiv 1 \bmod 4$ besitzt und nicht prim ist, hat F_5 neben der offensichtlichen eine davon wesentlich verschiedene Darstellung als Summe zweier Quadrate. *Euler* gab diese im Jahr *1742* an (ohne weiteren Kommentar). Finden Sie diese.

(Hinweis: Wir wissen $F_5 = 641(a^2 + b^2) = (25 + 4i)(25 - 4i)(a + bi)(a - bi)$. Wären a und b schon bekannt, so ist die Lösung klar. Wegen $F_5 = (2^{16} + i)(2^{16} - i)$ ist das Primelement $25 - 4i$ entweder ein Teiler von $2^{16} + i$ oder $2^{16} - i$. Ist ersteres der Fall, wäre also

$$\frac{2^{16} + i}{25 - 4i} = a + bi$$

zu berechnen.)