Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 11

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 10.1.2022

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Die Formulierung des QRGs von Gauß lautete $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{(-1)^{(q-1)/2}q}{p}\right)$.

Zeigen Sie, dass diese genau äquivalent zur Aussage des QRGs der Vorlesung ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Für welche Primzahlen p (mit $p \neq 2,\ 11$) ist 11 quadratischer Rest mod p?

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Welche der Zahlen $a_1 = 16993$, $a_2 = 17993$ sind quadratische Reste mod 65537?
Inwieweit muss man dazu wissen, dass $F_4 = 65537$ eine Primzahl ist? Prüfen Sie dies mit Aufgabe 4(b) von Blatt 9 nach.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Gegeben sei ein ungerades $b \in \mathbb{N}$. Gilt $\left(\frac{y}{b}\right) = 1$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $(y, b) = 1$, so ist b eine Quadratzahl. (Tipp: Œ b quadratfrei, chinesischer Restsatz)

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Sei a eine beliebige ganze Zahl $\neq 0$. Gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die a quadratischer Rest mod p ist? (Hinweis: Aufgabe 3 Blatt 8)

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Sei $p > 5$ prim. Dann gibt es zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die beide quadratische Reste sind. Und ebenso: zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die beide quadratische Nichtreste sind. (Hinweis: Aufgabe 6 Blatt 10.)