Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 1

hhu Düsseldorf
WiSe 2021/22

Abgabe: bis Montag 18.10.2021

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sind a, b, d, m, n natürliche Zahlen mit $a \mid d^m - 1$, mit $b \mid d^n - 1$ und $(a, b) = 1$, so gilt $ab \mid d^{[m,n]} - 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Ist $a > 1$ eine natürliche Zahl, so gilt für je zwei natürliche Zahlen m und n, dass

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Bestätigen Sie damit, dass $2^{35} - 1$ sowohl durch 31 als auch durch 127 teilbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung erst für $(m, n) = 1$, wobei die Aussagen $(a, b+ma) = (a, b)$ und $(a^n, a^n - 1) = 1$ helfen können.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Die natürliche Zahl $R_n = \sum_{m=0}^{n-1} 10^m$ heißt n-te Repetier-Eins.

(a) Aus $n \mid m$ folgt $R_n \mid R_m$. (Hinweis: Aufgabe 2.)

(b) Aus $d \mid R_n$ und $d \mid R_m$ folgt $d \mid R_{n+m}$. (Hinweis: Zeigen Sie erst $R_{n+m} = R_n 10^m + R_m$.)

(c) Es gilt $(R_n, R_m) = 1$ genau dann, wenn $(n, m) = 1$.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Für alle natürlichen Zahlen n ist $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ eine ganze Zahl.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) = 1$. Dann gilt

(1) $(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$,

(2) $(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}$,

(3) $(a^2 + b^2, a + b) \in \{1, 2\}$,

(4) $(a + b, a^2 - 3ab + b^2) \in \{1, 5\}$.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $(n^2 + 3n + 2, 6n^3 + 15n^2 + 3n - 7) = 1$.