

# Einführung in die Zahlentheorie

## Blatt 0

hhu Düsseldorf  
WiSe 2021/22

**Abgabe: gar nicht, nur zur mündlichen Besprechung am 13.10.2021**

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/EZ/>

---

**Aufgabe 1:** Das Geburtsdatum des Diophantos von Alexandria ist unbekannt, die Angaben schwanken zwischen 100 v. Chr. und 350 n. Chr. Aus einer Quelle des 4. Jahrhunderts ist folgendes Epigramm überliefert:

Seine Jugend dauerte ein sechstel seines Lebens – sein Bartwuchs begann nach einem weiteren zwölftel seines Lebens – ein siebentel seines Lebens später heiratete er – fünf Jahre danach wurde sein Sohn geboren – dieser lebte halb so lange wie sein Vater – vier Jahre nach dem Tode des Sohnes starb auch der Vater.

Wie alt ist Diophantos von Alexandria geworden?

### Aufgabe 2: Teilbarkeit

Diese Aufgaben können Sie lösen, ohne den Satz von der eindeutigen PFZ zu verwenden.

- (1) Zeigen oder widerlegen Sie: Gilt  $a \mid (b + c)$ , so ist entweder  $a \mid b$  oder  $a \mid c$ .
- (2) Zeigen Sie, dass  $(a, a + n) \mid n$ , und schließen Sie daraus  $(a, a + 1) = 1$ .
- (3) Zeigen Sie: Aus  $(a, b) = 1$  und  $c \mid (a + b)$  folgt  $(a, c) = (b, c) = 1$ .
- (4) Folgt aus  $(a, b) = 1$  die Behauptung  $(a + b, ab) = 1$ ?
- (5) Zeigen Sie:  $d = (a, b) \iff d \mid a, d \mid b$  und  $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$
- (6) Es seien  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , sei  $2 \nmid d$ , sei  $d \mid (a, b)$  und  $d \mid (a - b)$ . Zeigen Sie, dass dann  $d \mid (a, b)$ .
- (7) Zeigen Sie:  $(a, bc) = (a, (a, b)c)$ .
- (8) Zeigen Sie:  $(a, bc) = (a, (a, b)(a, c))$ .
- (9) Zeigen Sie: Gilt  $(a, c) = 1$ , dann ist  $(ab, c) = (b, c)$ .
- (10) Zeigen Sie: Gilt  $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ , so ist  $(a, b, c)[a, b, c] = abc$ .
- (11) Zeigen oder widerlegen Sie:
  - (a) Gilt  $(a, b) = (a, c)$ , so folgt  $[a, b] = [a, c]$ .
  - (b) Gilt  $(a, b) = (a, c)$ , so folgt  $(a^2, b^2) = (a^2, c^2)$ .
  - (c) Gilt  $(a, b) = (a, c)$ , so folgt  $(a, b) = (a, b, c)$ .
- (12) Zeigen Sie  $(a, b) = (a + b, [a, b])$ . Finden Sie damit zwei natürliche Zahlen der Summe 186, deren kgV gleich 1440 ist.
- (13) Sei  $n > 1$  eine natürliche Zahl. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
  - (a)  $3 \mid n^3 - n$ ,
  - (b)  $3 \mid n(n + 1)$ ,
  - (c)  $8 \mid (2n + 1)^2 - 1$ ,
  - (d)  $6 \mid n(n + 1)(n + 2)$ .
- (14) Gilt für jede gerade natürliche Zahl  $n$  die Aussage  $24 \mid n(n + 1)(n + 2)$ ?
- (15) Zeigen Sie für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $(n, 2) = (n, 3) = 1$ , dass  $24 \mid n^2 + 47$  gilt.