

Abgabe: bis Montag 23.05.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

Aufgabe 1 (4 Punkte): Abschätzungen mit dem Satz von Tschebyshev und dem PZS

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $0 < c < 1$ gibt mit:

(*) Für alle hinreichend großen x gibt es eine Primzahl p mit $x < p \leq (1 + c)x$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes, dass (*) für jedes $c > 0$ gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Über die Größe der n -ten Primzahl, vgl. AnZ11.4

Sei $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ die aufsteigende Folge der Primzahlen.

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Tschebyshev, dass $n \log(n) \ll p_n \ll n \log(n)$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes, dass $p_n = n \log(n) + o(n \log(n))$ gilt.

Hinweis: Z. B. durch $n \log(p_n)/p_n - n \log(n)/n \rightarrow 0$ unter Verwendung von (a).

Aufgabe 3 (5 Punkte): Über Pole von f'/f mit Funktionentheorie und stetige Fortsetzungen von Dirichletreihen in $s = \sigma_c = 0$

(a) Die meromorphe Funktion f habe in z_0 einen Pol der Vielfachheit $m (> 0)$. Zeigen Sie, dass f'/f in z_0 einen einfachen Pol mit Residuum $-m$ hat.

Bemerkung: Vgl. (später in) AnZ13.2.3.).

(b) Zeigen Sie, dass es Dirichletreihen $f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ gibt, so dass $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(\sigma)$ existiert, aber

$\sum_{n \geq 1} a_n$ divergiert.

Hinweis: $a_n = n^{-1-i}$ und AnZ10.

Wissensfragen zu AnZ11, AnZ12 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ11:

- (1) Wie werden die drei gängigsten Primzahlzählfunktionen definiert?
- (2) Warum ist die zweite Tschebyschev-Funktion besonders gut handhabbar, um Verbindungen mit ζ auszudrücken?
- (3) Welche zwei Primzahlzählfunktionen haben nahe zusammenliegende Werte?
- (4) Wie lautet der Satz von Tschebyschev (für jede der Primzahlzählfunktionen gibt es eine Formulierung)?
- (5) Mit welcher Methode kann man von einer Abschätzung der Funktion $\vartheta(x)$ zu einer von $\pi(x)$ kommen?
- (6) Was besagt Bertrands Postulat und inwiefern ist es eine Folgerung des Satzes von Tschebyschev?

AnZ12:

- (1) Wie definiert man das logarithmische Integral $\text{li}(x)$?
- (2) Welche Formulierungen des Primzahlsatzes gibt es mit den drei Primzahlzählfunktionen?
- (3) Welche der Formulierungen des Primzahlsatzes ist (vermutlich) die genaueste?
- (4) Welche Funktion der Gestalt $x/(\log(x) - A)$ stellt demnach die beste Approximation an $\pi(x)$ dar?
- (5) Welches Teilergebnis zum Primzahlsatz konnte Tschebyschev beweisen?