Analytische Zahlentheorie, Blatt 5

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: Montag 09.05.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Analytische Eigenschaften von Dirichletreihen

Sei $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ eine Dirichletreihe mit endlicher Konvergenzabszisse. Zeigen Sie:

(a) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, und falls $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ so ist, dass $D(s)$ in die Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$ holomorph fortgesetzt werden kann, dann ist die Reihe für $D(s)$ konvergent für $\sigma > \sigma_0$.

(b) Es gilt $\lim_{\sigma\to\infty} D(\sigma) = a_1$.

(c) Es gilt $\lim_{\sigma\to\infty} \zeta'(\sigma) = 0$.

(d) Warum gibt es keine Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$, in der $1/\zeta'(s)$ als eine konvergente Dirichletreihe geschrieben werden kann?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Relative Häufigkeit quadratfreier Zahlen

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mu^2(n) = \sum_{\substack{1\leq d\leq n\\ d^2\mid n}} \mu(d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Beide Seiten sind multiplikativ.

(c) Zeigen Sie mit (b), dass

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} + \mathrm{O}(x^{-1/2}).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Relative Häufigkeit sichtbarer Gitterpunkte

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Identität $\varphi = \mu * \mathrm{id}$ die asymptotische Formel

$$\sum_{n\leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + \mathrm{O}(x\log x).$$

(b) Ein Gitterpunkt $(n,k) \in \mathbb{Z}^2$ heiße sichtbar, wenn auf der Strecke zwischen $(0,0)$ und (n,k) kein weiterer Gitterpunkt liegt. Wie groß ist die Anzahl der sichtbaren Punkte in $\mathcal{Q}(x) := ([1,x]\cap\mathbb{Z})^2$ im Verhältnis zur Anzahl $\#\mathcal{Q}(x)$ aller Gitterpunkte, wenn $x\to\infty$?

Wissensfragen zu AnZ7, AnZ8 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ7:

(1) Wie lautet der Satz von Landau zur holomorphen Fortsetzbarkeit einer Dirichletreihe in den Punkt $s = \sigma_c$? Welche Voraussetzung ist dabei wesentlich?

AnZ8:

(1) Was ist ein unendliches Produkt? Wie wird es definiert? Unter welchen Voraussetzungen gelingt eine solche Definition?

(2) In welchen Fällen divergiert ein unendliches Produkt gegen 0?

(3) Kennen Sie ein (hinreichendes und notwendiges) Kriterium zur Konvergenz eines (unendlichen) Produkts mit einer Reihe?

(4) Wie kann die Konvergenz eines Produktes mit einer Reihe über Logarithmenwerten charakterisiert werden?

(5) Wann nennt man ein Produkt absolut konvergent?

(6) Welches Kriterium zur absoluten Konvergenz eines Produktes kennen Sie?

(7) Wie lautet der Umordnungssatz für absolut konvergente Produkte?

(8) Wie lautet der Eulersche Produktsatz? Was ist darin ein Eulersches Produkt?