

Abgabe: Montag 25.4.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

Aufgabe 1 (5 Punkte): Aufgabe zur O-Notation

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\gamma > 0$ so gibt, dass für $x \rightarrow \infty$ die asymptotische Formel

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

für die harmonische Reihe gilt.

Tipp: $1/n = 1 \cdot (1/n)$ und partielle Summation unter Beachtung von $\{x\} := x - [x] \in [0, 1[$.

(b) Zeigen Sie damit die Asymptotik

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log(x) + O(x) \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Dirichletreihen-Aufgabe mit partieller Summation:

Die Dirichletreihe $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ habe die Konvergenzabszisse ρ , und es gelte $\sum_{n \leq x} a_n = O(x^r)$ für ein $r \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann $\rho \leq r$ gilt.

Wissensfragen zu AnZ3, AnZ4 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ3:

- (1) Was ist eine asymptotische Funktion?
- (2) Wie führt man die Bachmann–Landau–Symbolik ein: Was bedeuten die O-Terme? Was ist dabei eine implizite Konstante? Was bedeutet dagegen ein o-Term?
- (3) Wie kann man mit der O- oder o-Symbolik eine Asymptotik ausdrücken? Wie mit \sim ?
- (4) Was nennt man in einer Asymptotik den Fehlerterm, was den Hauptterm? Wann ist eine Asymptotik überhaupt sinnvoll aufgeschrieben?
- (5) Wie wird die Vinogradov-Notation im Vergleich zur O-Notation benutzt? Wann ist diese vorteilhaft?
- (6) Wie lautet der Satz von der partiellen Summation in der kontinuierlichen Version? Wie wird dieser Satz bewiesen?
- (7) Wie lautet die Eulersche Summenformel?

AnZ4:

- (1) Was ist eine Dirichletreihe? Was ist ein Konvergenztrichter?
- (2) Wie zeigt man, dass eine Dirichletreihe in einer Halbebene $\sigma > \sigma_c$ konvergiert (wenn Konvergenz in einem $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ angenommen wird)?
- (3) Wo konvergiert eine Dirichletreihe absolut, wenn $\sigma_c \in \mathbb{R}$ die Konvergenzabszisse ist?
- (4) Wie lautet der Identitätssatz für Dirichletreihen? Welche Voraussetzung darin ist wesentlich?