Analytische Zahlentheorie, Blatt 13

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: bis Montag 27.06.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (3 Punkte): Verschärfung einer Bedingung in der Herleitung der Mertenssätze

Zeigen Sie, dass der PZS herleitbar ist aus der Annahme der Existenz des Grenzwertes

$$\delta := \lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{p\le x} \frac{\log(p)}{p} - \log(x) \Big).$$

Aufgabe 2 (7 Punkte): Fehlerterm im PZS, die (RH)

(a) Zeigen Sie unter Annahme der Riemannschen Vermutung (RH), dass $\pi(2x) \le 2\pi(x)$ für alle $x \ge x_0$ gilt. (Dies ist die Konvexitätsvermutung bzw. "zweite" Hardy–Littlewood-Vermutung $\pi(x+y) \le \pi(x) + \pi(y)$ für hinreichend großes $x = y$.)

(b) Inwieweit lässt sich die Annahme der (RH) abschwächen, so dass immer noch die Aussage in (a) folgt? Gilt die Aussage unkonditionell?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Natürliche Zahlen mit Einschränkungen an ihre Primteiler

(a) Sei P das Produkt einer beliebigen Menge von Primzahlen $p \le x$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{p\mid P} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \ll \exp\Big(-\sum_{p\mid P} \frac{1}{p} + \mathrm{O}(1)\Big)$$

für $x \to \infty$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\le x$, die keinen Primteiler $p \le \log(x)$ mit $p \equiv 2\ (3)$ besitzen, die asymptotische Dichte 0 besitzt. Dafür dürfen Sie verwenden, dass die Dirichletdichte $\delta_{P_{2,3}}$ der Menge $P_{2,3} := \{p \in \mathbb{P};\ p \equiv 2\ (3)\}$ existiert.

Hinweis: Benutzen Sie den Möbius-Trick $\varepsilon((n,P)) = \mu * \mathbb{1}((n,P))$ wie in Aufgabe 3 (a) von Blatt 2, sowie Teil (a).

Wissensfragen zu AnZ22, AnZ23 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ22:

(1) Was besagt die (analytische Form) der Riemannschen Vermutung (RH)?

(2) Inwiefern hängen die Nullstellen von ζ unmittelbar mit der Tschebyschev-Funktion ψ zusammen?

(3) Wie lautet eine äquivalente Umformulierung der (RH) mit der Primzahlzählfunktion?

(4) Welche Verschärfung des Restterms im PZS gilt unter Annahme der (RH)?

(5) Können Sie eine Umformulierung der (RH) nennen, die ohne den Primzahlzählfunktionen ψ, ϑ, π auskommt?

AnZ23:

(1) Wie definiert man die natürliche Dichte einer Teilmenge A der natürlichen Zahlen?

(2) Wie ist ihre Dirichlet-Dichte definiert?

(3) Welchen Zusammenhang zwischen diesen Dichte-Begriffen gibt es?

(4) Welche Dichte hat die Menge der Primzahlen?

(5) Welche Dirichlet-Dichte hat die Menge der Primzahlen der reduzierten Restklasse $a \bmod q$ in der Menge aller Primzahlen? Hängt diese von a ab?

(6) Kann daraus unmittelbar der Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen hergeleitet werden?