

**Abgabe:** bis Mittwoch 08.06.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

---

Auf diesem Blatt sei  $\mu$  die Möbiusfunktion und  $M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n)$  die Mertensfunktion.

**Aufgabe 1 (5 Punkte): PZS in M-Version durch Anwendung des Satzes von LWI**

Zeigen Sie den Primzahlsatz in der Version

$$M(x) = o(x) \text{ für } x \rightarrow \infty$$

durch eine Anwendung des Satzes von Landau–Wiener–Ikehara AnZ14.9 auf die Dirichletreihe von  $F(s) = \zeta(s) + \frac{1}{\zeta(s)}$ .

**Aufgabe 2 (5 Punkte): Zusammenhänge zwischen  $M$  und  $\zeta$ , motiviert durch AnZ16**

Zeigen Sie:

(a) Für  $\sigma > 1$  gilt  $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx$ .

(b) Falls  $M(x) = O(x^{1-\varepsilon})$  für ein  $0 < \varepsilon < 1$  gilt, so hat  $\zeta$  keine Nullstelle in  $\sigma > 1 - \varepsilon$ .  
(Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 3. Ein solches  $\varepsilon$  ist nicht bekannt.)

**Wissensfragen zu AnZ17, AnZ18 (nur mündlich, ohne Abgabe):**

---

**AnZ17:**

- (1) Wie ist die Euler–Mascheroni-Konstante  $\gamma$  definiert? Welche andere Darstellung der Konstanten  $\gamma$  gibt es?
- (2) Welcher Asymptotik genügt  $\sum_{n \leq x} \tau(n)$ , in Abhängigkeit von  $\gamma$  ausgedrückt?
- (3) Mit welchem Beweistrick gelingt eine derart scharfe Asymptotik? Warum wird der Trick Dirichletsche Hyperbelmethode genannt?
- (4) Welche Rolle spielt die harmonische Reihe bei der Herleitung einer Asymptotik für die Teileranzahlsumme  $\sum_{n \leq x} \tau(n)$ ?
- (5) Was ist der vermutlich beste, nicht weiter verbesserbare Fehlerterm im Dirichletschen Teilerproblem?

**AnZ18:**

- (1) Wie definiert man die Gammafunktion  $\Gamma(z)$  für positive Realteile?
- (2) Welche Funktionalgleichung erfüllt  $\Gamma$ , und was hat dies mit der Fakultätsfunktion zu tun?
- (3) Wie wird  $\Gamma$  damit auf  $\mathbb{C}$  meromorph fortgesetzt? Welche Pole ergeben sich?
- (4) Wie kann der Kehrwert der komplexen Sinusfunktion mit  $\Gamma$  ausgedrückt werden?
- (5) Wie beweist man  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ?