Analytische Zahlentheorie, Blatt 1

Abgabe: Montag 11.4.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Kombinatorische Fragestellungen bei Koeffizienten von Potenzreihen

Sei a_{100} der Koeffizient vor x^{100} in dem Polynom

$$\Big(\sum_{n=0}^{100} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{50} x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{20} x^{5n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{10} x^{10n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{5} x^{20n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{2} x^{50n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{1} x^{100n}\Big).$$

Zeigen Sie, dass $a_{100}-1$ die Anzahl Arten ist, auf die sich ein Euro in Kleingeld umwechseln lässt. (Als Kleingeld kommen in Betracht: 1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Cent-Stücke.)

Geben Sie weiter eine Funktion an, die kein Polynom ist, aber in deren Taylorentwicklung der 100. Koeffizient (vor x^{100}) die Zahl a_{100} ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zahlentheoretische Eigenschaften in Koeffizienten von Potenzreihen

(a) Das Produkt von m irgendwelchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist durch das Produkt der m ersten natürlichen Zahlen teilbar.

(b) Das Produkt von m aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen in arithmetischer Progression (d. h. von m Zahlen der Form a, $a+d$, $a+2d$, $\dots$, $a+(m-1)d$) ist durch $m!$ teilbar, wenn die Differenz der Progression zu $m!$ teilerfremd ist.

(c) Es sei $s\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{N}$, $(s,t)=1$. Dann gehen in den Nennern der Koeffizienten der Potenzreihe

$$(1+z)^{s/t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s}{t}\Big(\frac{s}{t}-1\Big)\cdots\Big(\frac{s}{t}-n+1\Big)\frac{z^n}{n!}$$

nur Primfaktoren von t auf.

Aufgabe 3 (5 Punkte): harmonische Reihe/Ziffernvermeidung

Betrachten Sie die harmonische Reihe, in der diejenigen Summanden gestrichen werden, deren Nenner die Ziffer 9 in ihrer Dezimaldarstellung enthalten. Zeigen Sie, dass die so entstandene Teilreihe konvergiert.

Hinweis: Zählen Sie erst die Summanden, deren Nenner zwischen $10^{m-1}-1$ und 10^m-1 liegen. Damit kann der Reihengrenzwert nach oben durch einen endlichen Wert abgeschätzt werden.

Wissensfragen zu AnZ1, AnZ2:

AnZ1:

(1) Wie kann man mit der von der Fibonaccifolge erzeugten Potenzreihe die Binetsche Formel beweisen?

(2) Wie zeigte Euler die Unendlichkeit der Primzahlmenge mit einem Produkt und der harmonischen Reihe?

(3) Wodurch kann man eine Partialsumme über die Kehrwerte der Primzahlen nach unten abschätzen?

AnZ2:

(1) Was ist eine zahlentheoretische Funktion und was die von ihr erzeugte Dirichletreihe?

(2) Was ist das Dirichletprodukt zweier zahlentheoretischer Funktionen?

(3) Welche Rolle spielt die 1-Erkennungsfunktion für die zahlentheoretische Funktion? Welche (algebraische) Struktur kann man der Menge der zahlentheoretischen Funktionen zuordnen?

(4) Was sind die Ihrer Meinung nach fünft interessantesten zahlentheoretischen Funktionen?

(5) Was ist der Unterschied zwischen Primteilern und Primfaktoren?

(6) Welche grundlegenden Eigenschaften sind für zahlentheoretische Funktionen von Bedeutung? Mit welcher erhält man eine Unterstruktur?

(7) Welche Bedeutung hat die Möbiusfunktion für zahlentheoretische Funktionen?

(8) Wie lauten die Möbiusschen Umkehrformeln?

(9) Welche Faltungsidentitäten für bestimmte zahlentheoretische Funktionen kennen Sie?