Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 13

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 20.1.2025, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu den Aufgaben 13.3 und 13.4 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 13.1

Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung besprochenen Aussagen. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $\Gamma = \Gamma(v_1, \dots, v_n)$ und $F = F(v_1, \dots, v_n)$ das zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ des euklidischen Raumes $V = \mathbb{R}^n$ gehörige Gitter und dessen Fundamentalbereich. Ist $T \subseteq V$ beschränkt, so gelten: (a) $\#\{\gamma \in \Gamma \mid T \cap (F + \gamma) \neq \varnothing\}$ ist endlich; (b) $\#\{T \cap (F + \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ist endlich; (c) es existieren $m \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$ dergestalt, daß T die disjunkte Vereinigung der Mengen $T \cap (F + \gamma_i)$, für $1 \leq i \leq m$, ist.

Aufgabe 13.2

Beweisen Sie mit Hilfe des Minkowskischen Gitterpunktsatzes den Zwei-Quadrate-Satz von Fermat: Ist $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv_4 1$, so existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + b^2$.

Hinweis. Verfahren Sie ähnlich wie in der Vorlesung im Beweis des Vier-Quadrate-Satzes von Lagrange. Nach dem ersten Ergänzungssatz zum Quadratischen Reziprozitätsgesetz existiert jedenfalls $r \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \equiv_p r^2$. Betrachten Sie nun das Gitter $\Gamma(v_1, v_2)$ für die $\mathbb{R}$-Basis $v_1 = (1, r)$, $v_2 = (0, p)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $(r, s) \neq (0, 0)$. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und sei $n = r + 2s$. Betrachten Sie

$$T(r, s, t) = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^r |x_i| + \sum_{j=1}^s 2\sqrt{x_{r+2j-1}^2 + x_{r+2j}^2} \leq t\Big\}.$$

(a) Zeigen Sie: $T(r, s, t)$ ist eine konvexe, 0-symmetrische, kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(b) Berechnen Sie: $\mathrm{vol}(T(r, s, t)) = 2^r (\pi/2)^s (n!)^{-1} t^n$.

Hinweis. Für (a) ist die folgende Ungleichung nützlich:

$$\sqrt{(\lambda a + \mu b)^2 + (\lambda c + \mu d)^2} \leq \lambda\sqrt{a^2 + c^2} + \mu\sqrt{b^2 + d^2} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die sich aus einer kurzen Rechnung mit $w = a + ic, z = b + id \in \mathbb{C}$ ergibt. Für (b) genügt es, den Fall $t = 1$ zu behandeln, und es bietet sich an, Induktion nach $r + s$ zu verwenden.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}^n$. Sei Γ eine diskrete additive Untergruppe von V, und sei m die Dimension des von Γ aufgespannten Teilvektorraums von V.

Zeigen Sie: Dann existieren $v_1, \dots, v_m \in V$ mit $\Gamma = v_1\mathbb{Z} + \ldots + v_m\mathbb{Z}$, und insbesondere sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach m. Behandeln Sie als Induktionsanfang die Fälle $m \in \{0, 1\}$. Der Induktionsschritt, für $m \geq 2$, geht im wesentlichen dann wie der Fall $m = 1$.