Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 12

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 13.1.2025, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu den Aufgaben 12.1 und 12.3 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

(a) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ mit Ganzheitsring $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, und sei p eine rationale Primstelle. Weisen Sie mit Hilfe des Dedekindschen Zerlegungssatzes und des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes nach:

$$\begin{array}{ll} p \text{ ist zerlegt in } k, & \text{falls } p \equiv_{20} 1, 3, 7, 9, \\ p \text{ ist verzweigt in } k, & \text{falls } p \in \{2, 5\}, \\ p \text{ ist träge in } k, & \text{falls } p \equiv_{20} 11, 13, 17, 19. \end{array}$$

(b) Sei $k = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 + 10\alpha + 1 = 0$. Zeigen Sie $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k = \mathbb{Z}[\alpha]$. Bestimmen Sie sodann für die rationalen Primstellen $p \in \{2, 4027\}$ jeweils die Zerlegung von $p\mathfrak{o}$ als Produkt von Primidealen in $\mathfrak{o}$ und verifizieren Sie die Bilanzgleichung.
Hinweis. Für $p = 4027$ gilt $X^3 + 10X + 1 \equiv_p (X - 403)(X - 1812)^2$.

Aufgabe 12.2

(a) Verallgemeinern Sie den in der Vorlesung besprochenen Dedekindschen Zerlegungssatz, so daß Sie für Zahlkörper $k = \mathbb{Q}(\vartheta)$ mit $\vartheta \in \mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k$ und rationale Primstellen p mit $p \nmid |\mathfrak{o} : \mathbb{Z}[\vartheta]|$ die Zerlegung von $p\mathfrak{o}$ in Primideale erhalten.

(b) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2/3})$ und $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k$. Zeigen Sie: $k = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ für $\alpha = \sqrt[3]{12}$ und $\beta = \sqrt[3]{18}$, und weiter ist $|\mathfrak{o} : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta|$ endlich und ungerade. Überprüfen Sie für $p = 2$, ob sich der in (a) bereitgestellte verallgemeinerte Zerlegungssatz für $\vartheta = \alpha$ bzw. $\vartheta = \beta$ anwenden läßt, und bestimmen Sie dann eine Zerlegung von $2\mathfrak{o}$ in Primideale.

Bemerkung. In (b) gilt tatsächlich $\mathfrak{o} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, uns genügt aber $2 \nmid |\mathfrak{o} : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta|$.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

(a) Sei A eine endlich dimensionale (assoziative) Algebra über einem Körper F und $n = \dim_F(A)$. Zeigen Sie: Ist $A = A_1 \times A_2$ als Ring das Produkt zweier F-Algebren und setzt sich die F-Basis $u_1, \ldots, u_n$ für A aus einer F-Basis $u_1, \ldots, u_m$ für A_1 und einer F-Basis $u_{m+1}, \ldots, u_n$ für A_2 zusammen, so gilt für die jeweiligen Diskriminanten:

$$d_A(u_1, \ldots, u_n) = d_{A_1}(u_1, \ldots, u_m) \cdot d_{A_2}(u_{m+1}, \ldots, u_n).$$

(b) Sei $E = F(\omega)$ eine endliche separable Körpererweiterung eines Körpers F und $n = [E : F]$. Dann ist $d_E(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}) \neq 0$.

Hinweis. Erinnern Sie sich an Abschnitt 2.

(c) Zeigen Sie ergänzend zu dem in der Vorlesung bewiesenen Satz: Rationale Primstellen p, die die Körperdiskriminante Δ_k eines Zahlkörpers k teilen, sind in k stets verzweigt.

Hinweis. Endliche Körper E sind über ihrem jeweiligen Primkörper stets separabel. Wenden Sie nun – ähnlich wie in der Vorlesung – die Erkenntnisse aus (a) und (b) an.