Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

# Zahlentheorie I – Blatt 11

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 6.1.2025, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu den Aufgaben 11.1 und 11.3 ein; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/.

**Aufgabe 11.1** (4 Punkte)

Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-29})$ mit Ganzheitsring $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-29}]$. Es ist $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 = (1-\sqrt{-29})(1+\sqrt{-29})$.

(a) Bestimmen Sie die Zerlegung von $30\mathfrak{o}$ als Produkt von Primidealen in $\mathfrak{o}$ und erklären Sie, wie die beiden eingangs angegebenen Faktorisierungen von 30 sich aus unterschiedlichen Gruppierungen der beteiligten Primideale ergeben.

(b) Wieviele Ideale $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{o}$ mit $30 \in \mathfrak{o}$ gibt es?

(c) Verifizieren Sie für die rationalen Primstellen 2, 3, 5 jeweils die zugehörige Bilanzgleichung bzgl. $k\,|\,\mathbb{Q}$, indem Sie alle Primideale $\mathfrak{p} \trianglelefteq_{\mathrm{prim}} \mathfrak{o}$ benennen, die die entsprechende Primzahl $p$ teilen, sowie deren Verzweigungsindizes und Trägheitsgrade angeben.

(d) Finden Sie ein Primideal $\mathfrak{l} \trianglelefteq_{\mathrm{prim}} \mathfrak{o}$, welches vom Trägheitsgrad 2 über seiner zugehörigen rationalen Primstelle $l$ ist.

(e) Finden Sie eine rationale Primstelle $p > 2$, die verzweigt in $k$ ist.

**Aufgabe 11.2**

Sei $k = \mathbb{Q}(\vartheta)$ für $\vartheta \in \mathbb{C}$ mit $\vartheta^3 - \vartheta^2 - 2\vartheta - 8 = 0$, und sei $\tilde{\vartheta} = 4\vartheta^{-1} = (\vartheta^2 - \vartheta)/2 - 1$. In Aufgabe 10.2 wurde gezeigt: Der Ganzheitsring von $k$ ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\vartheta + \mathbb{Z}\tilde{\vartheta}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau drei Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ von $\mathfrak{o}$, die über der rationalen Primstelle 2 liegen, und bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3\}$ jeweils ein Element $\pi_i \in \mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{p}_i = 2\mathfrak{o} + \pi_i \mathfrak{o}$. Geben Sie für $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ jeweils den absoluten Verzweigungsindex und Trägheitsgrad an.

*Hinweis.* Überlegen Sie sich zunächst, daß $\mathfrak{o}$ isomorph ist zu dem Ring $\mathbb{Z}[X,Y]/I$ mit

$$I = \langle X^3 - X^2 - 2X - 8, XY - 4, 2Y - X^2 + X + 2, Y^2 - 2X + 2 + Y \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[X,Y].$$

Hierfür ist es nützlich, noch einmal auf Ergebnisse aus Aufgabe 10.2 zurückzugreifen, insbesondere, was den Index $|\mathfrak{o} : \mathbb{Z}[\vartheta]|$ betrifft.

(b) Bestimmen Sie für $p \in \{3,5,7\}$ jeweils alle Primideale von $\mathfrak{o}$, die über der rationalen Primzahl $p$ liegen, sowie deren absolute Verzweigungsindizes und Trägheitsgrade.

(c) Zeigen Sie: Es gibt genau zwei Primideale $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{o}$, die über der rationalen Primzahl 503 liegen, und bestimmen Sie für $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ jeweils deren absoluten Verzweigungsindex und Trägheitsgrad.

*Hinweis.* In Aufgabe 10.2 wurde bereits die Diskriminante berechnet: $\Delta_k = -503$. Verifizieren Sie, daß $X^3 - X^2 - 2X - 8$ modulo 503 eine doppelte Nullstelle besitzt, indem Sie mit der formalen Ableitung arbeiten. Verwenden Sie anschließend die Bilanzgleichung.

Bitte wenden!

**Aufgabe 11.3** (4 Punkte)

Sei $k$ ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k$.
Für $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{o}$ und beliebige Zahlkörpererweiterungen $K\,|\,k$ sei

$$\mathfrak{a}_K = \mathfrak{o}_K\,\mathfrak{a} = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i \;|\; m \in \mathbb{N},\; \lambda_i \in \mathfrak{o}_K \text{ und } \alpha_i \in \mathfrak{a} \text{ für } 1 \le i \le m \Big\} \trianglelefteq \mathfrak{o}_K.$$

(a) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{o}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Zahlkörpererweiterung $K\,|\,k$ dergestalt, daß $\mathfrak{a}_K$ ein Hauptideal von $\mathfrak{o}_K$ ist und $\mathfrak{a}_L \cap k = \mathfrak{a}$ für jede Zahlkörpererweiterung $L\,|\,K$ gilt.

*Hinweis.* Die Klassenzahl $h = h_k$ ist endlich, und $\mathfrak{a}^h = \alpha\mathfrak{o}$ ist ein Hauptideal. Betrachten Sie $K = k(\omega)$ für $\omega = \sqrt[h]{\alpha}$. Nutzen Sie geschickt die eindeutige Primfaktorzerlegung für Ideale in $\mathfrak{o}_K$ sowie in $\mathfrak{o}$.

(b) Folgern Sie: Es gibt eine Zahlkörpererweiterung $K\,|\,k$ dergestalt, daß für jedes Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{o}$ gilt: $\mathfrak{a}_K$ ist ein Hauptideal von $\mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{a}_K \cap k = \mathfrak{a}$.

*Hinweis.* Wenden Sie (a) an.