Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 8

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 02.12.2024, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu der Aufgabe 8.3 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 8.1

Sei $A \leq B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Zeigen Sie: A ist eine Körper genau dann, wenn B ein Körper ist.

Aufgabe 8.2

Sei $\mathfrak{o}$ der Ganzheitsring eines Zahlkörpers und seinen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zwei unterschiedliche von Null verschiedene Primideale von $\mathfrak{o}$. Zeigen Sie: Für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{p}^k + \mathfrak{q}^l = \mathfrak{o}$.

Bemerkung. Wie üblich schreiben wir kurz $\mathfrak{a}^m$ für $\mathfrak{a}^{\circ m} = \mathfrak{a} \circ \ldots \circ \mathfrak{a}$ mit m Faktoren.

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Spezialfall des Dirichletschen Primzahlsatzes mit einfachen algebraischen Methoden zu beweisen. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Bezeichne mit $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ das $n$te Kreisteilungspolynom; vgl. Aufgabenblatt 6.

(a) Zeigen Sie: Für $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid n$ gilt $\Phi_n(a) \equiv_p 0$ genau dann, wenn $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ die Ordnung n hat.

Hinweis. Zeigen und nutzen Sie $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$ modulo p besitzt nur einfache Nullstellen.

(b) Folgern Sie für $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid n$: Das Polynom Φ_n, modulo p betrachtet, besitzt wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $p \equiv_n 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ erfüllt jeder Primteiler q der ganzen Zahl $\Phi_n(mn)$ die Bedingungen $q \nmid m$ und $q \equiv_n 1$.

Hinweis. Erläutern Sie, daß der konstante Term von Φ_n gleich ± 1 ist, um (b) anzuwenden.

(d) Nehmen Sie, für einen Widerspruch, an, die Menge $P = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv_n 1\}$ wäre endlich. Erläutern Sie, wie m in (c) dann als Vielfaches von $\prod_{p \in P} p$ gewählt werden kann, so daß sich ein $q \in \mathbb{P} \smallsetminus P$ mit $q \equiv_n 1$ ergäbe.

Endergebnis. Damit erhalten wir den anvisierten Spezialfall des Dirichletschen Primzahlsatzes: Die Menge $\{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv_n 1\}$ ist unendlich.

Aufgabe 8.4

Sei $l \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$. Sei $k = \mathbb{Q}(\zeta)$ der l^mten Kreisteilungskörper, wobei ζ eine primitive l^mte Einheitswurzel bezeichne.

(a) Berechnen Sie die Diskriminante $\mathrm{D}_{k|\mathbb{Q}}(\zeta)$.

Hinweis. Der Fall $m = 1$ wurde, im interessanten Fall $l \geq 3$, bereits in der Vorlesung behandelt. Gehen Sie ähnlich vor. Dazu müssen Sie als erstes das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ bestimmen.

(b) Zeigen Sie: Der Ganzheitsring von k ist $\mathfrak{o}_k = \mathbb{Z}[\zeta]$; insbesondere ist $\Delta_k = \mathrm{D}_{k|\mathbb{Q}}(\zeta)$.

Hinweis. Auch hier wurde der Fall $m = 1$ in der Vorlesung behandelt, und es bietet sich an, ganz ähnlich zu argumentieren.