Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 7

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 25.11.2024, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu der Aufgabe 7.1 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 7.1 (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Ganzheitsring $\mathfrak{o}_k$ für den Zahlkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, indem Sie eine Ganzheitsbasis konstruieren, und berechnen Sie die Diskriminante Δ_k.

Hinweis. Schränken Sie zunächst $|\mathfrak{o}_k : \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]|$ ein. Behandeln Sie dann für die möglichen Primteiler dieses Index jeweils endlich viele relevante Fälle, um $\mathfrak{o}_k$ mit Hilfe der Normabbildung weiter einzugrenzen.

(b) Bestimmen Sie den Ganzheitsring $\mathfrak{o}_k$ für den Zahlkörper $k = \mathbb{Q}(\beta)$, der sich durch Hinzufügen einer Nullstelle β des Polynoms $f = X^3 - X - 1$ ergibt, indem Sie eine Ganzheitsbasis konstruieren. Berechnen Sie zudem die Diskriminante Δ_k.

Hinweis. Schränken Sie auch in diesem Fall $|\mathfrak{o}_k : \mathbb{Z}[\beta]|$ ein. Nutzen Sie, daß Ihnen die Koeffizienten des Polynoms f die Werte der elementarsymmetischen Polynome in drei Unbestimmten ausgewertet in den drei Nullstellen von f verraten.

Aufgabe 7.2

Sei $M = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \mathbb{Z}v_3$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul mit den definierenden Relationen

$$\begin{aligned} 4v_1 + 4v_2 + 14v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 10v_3 &= 0 \\ -2v_1 + 58v_2 + 38v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sei $F = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 \cong \mathbb{Z}^3$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) Stellen Sie die Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z})$ für einen $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\alpha\colon F \to F$ bzgl. $\mathfrak{E}$ auf, so daß $M \cong F/K$ mit $K = \mathrm{Bild}(\alpha)$ gilt.

(b) Führen Sie geeignete Zeilen- und Spaltenumformungen durch, um den kanonischen Invariantenvertreter der Äquivalenzklasse $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})A\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z})$ zu finden, d. h. die eindeutig bestimmte Diagonalmatrix D innerhalb der Klasse, deren Diagonaleinträge $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$ die Bedingung $d_1 \mid d_2 \mid d_3$ erfüllen.

(c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis und Ihre Rechnung zu (b), um den Isomorphietyp von M zu bestimmen und M explizit in der Form

$$M = \mathbb{Z}\tilde{v}_1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{v}_2 \oplus \mathbb{Z}\tilde{v}_3, \qquad \text{mit} \quad \mathbb{Z}\tilde{v}_i \cong \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \quad \text{für } 1 \le i \le 3,$$

zu schreiben, wobei $d_1\mathbb{Z} \supseteq d_2\mathbb{Z} \supseteq d_3\mathbb{Z}$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3

Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ein quadratischer Zahlkörper, mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ quadratfrei.

(a) Zeigen Sie: k besitzt eine normale Ganzheitsbasis, d. h., eine Ganzheitsbasis, die sich aus den $\mathrm{Gal}(k\,|\,\mathbb{Q})$-Konjugierten eines einzelnen Elementes zusammensetzt, genau dann, wenn $m \equiv_4 1$ ist.

(b) Bestimmen Sie, für $m \equiv_4 1$, explizit alle normalen Ganzheitsbasen für k.

Bemerkung. Es existiert ein Zahlkörper k, der galoissch über $\mathbb{Q}$ mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung 5 ist und unendlich viele normale Ganzheitsbasen besitzt.[1]

[1]vgl.: D. Eloff, B. K. Spearman und K. Williams, Fibonacci Quarterly **45** (2007), 151–154.