Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 4

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 04.11.2024, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu der Aufgabe 4.4 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 4.1

(a) Sei $D \in \mathbb{N}$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}$. Beschreiben Sie jeweils die ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichungen $X^2 - DY^2 = 1$ und $X^2 - DY^2 = -1$.

(b) Sei $D \in \mathbb{N}$ kein Quadrat in $\mathbb{Z}$, mit quadratfreiem Anteil $d \geq 2$, und sei $m \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung $X^2 - DY^2 = m$ mittels der Lösungsmenge der diophantischen Gleichung $X^2 - dY^2 = m$.

Aufgabe 4.2

Sei $\alpha \in \mathfrak{X}_2$ eine (reelle) quadratische Irrationalzahl, und sei $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ der von 1, α aufgespannte $\mathbb{Z}$-Modul in $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha$. Es sei α Nullstelle von $aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(a,b,c) = 1$, insbesondere also $D = D(\alpha) = b^2 - 4ac$.

(a) Erläutern Sie: $\mathfrak{o} = \{\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha) \mid \lambda M \subseteq M\}$ ist ein Unterring des Körpers $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) Zeigen Sie: Für den in (a) definierten Ring $\mathfrak{o}$ gilt

$$\mathfrak{o} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(a\alpha) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D/4} & \text{falls } D \equiv_4 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{falls } D \equiv_4 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4.3

Betrachten Sie, speziell für $D = 60$, die „Pellsche Gleichung“

$$X^2 - 60Y^2 = \pm 4. \qquad (*)$$

In Aufgabe 3.2 wurde insbesondere gezeigt: $\alpha = 3 + \sqrt{15} \in \mathfrak{R}_2(60)$, d. h., α ist eine reduzierte quadratische (reelle) Irrationalzahl der Diskriminante $D(\alpha) = 60$.

(a) Folgen Sie dem in der Vorlesung entwickelten Verfahren und bestimmen Sie konkret: die Standuntergruppe $G_\alpha \leq G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, den maßgeblichen Ring $\mathfrak{o} \leq \mathbb{Q}(\alpha)$, für den $G_\alpha \cong \mathfrak{o}^\times$ gilt, sowie die Fundamentaleinheit ε von $\mathfrak{o}$.

(b) Berechnen Sie sodann alle ganzzahligen Lösungen (x, y) der diophantischen Gleichung $(*)$, für die $|x|, |y| \leq 100$ gilt.

(c) Beschreiben Sie jeweils die ganzzahligen Lösungen der beiden klassischen Pellschen Gleichungen

$$\text{(i)} \quad X^2 - 60Y^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad X^2 - 60Y^2 = -1.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 (8 Punkte)

Eine natürliche Zahl N heißt eine *Dreieckszahl*, wenn sie sich als $N = 1 + 2 + \ldots + n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ schreiben läßt. Anschaulich bedeutet dies, daß sich N gleichgroße Münzen auf einer Tischplatte in der Form eines gleichseitigen Dreiecks anordnen lassen, dessen Kanten aus jeweils n Münzen gebildet werden. (Der sehr viel häufiger verwendete Begriff „Quadratzahl" hat offenbar eine ganz ähnliche geometrische Bedeutung.)

(a) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $N \geq 2$, die sowohl eine Dreiecks- als auch eine Quadratzahl ist.

(b) Finden Sie allgemein heraus, welche natürlichen Zahlen N sowohl Dreiecks- als auch Quadratzahlen sind, indem Sie diese mit Hilfe bestimmter positiver Lösungen einer geeigneten Pellschen Gleichung beschreiben. – Zeigen Sie so insbesondere: Es gibt unendlich viele Zahlen., die zugleich Dreiecks- und Quadratzahlen sind.

Hinweis. Die relevante Pellschen Gleichung ist $X^2 - 2Y^2 = 1$. Sie können die Lösungen dieser Gleichung systematisch mit dem Verfahren aus der Vorlesung bestimmen, indem Sie auf die Lösungstheorie für die Gleichung $X^2 - 8Y^2 = \pm 4$ zurückgreifen. Alternativ können Sie die Lösungen auch erraten, wenn Sie berücksichtigen, wie die Lösungsmenge qualitativ aussieht.

(c) Sei $N_1 = 1, N_2, \ldots$ die aufsteigende Folge aller natürlichen Zahlen, die sowohl Dreiecks- als auch Quadratzahlen sind. Berechnen Sie konkret N_3 sowie N_4, und leiten Sie folgende grobe Abschätzung her:

$$9^k < N_k < 36^k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 3.$$

Zusatz. Vielleicht gelingt Ihnen eine genauere Abschätzung?