Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

# Zahlentheorie I – Blatt 3

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 28.10.2024, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu den Aufgaben 3.4 und 3.5 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

**Aufgabe 3.1**

(a) Geben Sie eine algebraische Beschreibung der reellen Irrationalzahlen $\alpha$ mit rein periodischer Kettenbruchentwicklung $\alpha = [[\overline{q}]]$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie $[[a; \overline{2a}]]$ für $a \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 3.2**

(a) Berechnen Sie explizit $\mathfrak{R}_2(60)$, die Menge aller reduzierten quadratischen (reellen) Irrationalzahlen der Diskriminante 60.

(b) Zerlegen Sie $\mathfrak{R}_2(60)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-Bahnen.

**Aufgabe 3.3**

(a) Bestimmen Sie alle Tripel $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ mit $a+b+c = a \cdot b \cdot c$.

(b )Bestimmen Sie alle Lösungen $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ der diophantischen Gleichung

$$(X+Y+Z)^3 = X^3 + Y^3 + Z^3.$$

In Aufgabe 2.1 haben Sie gezeigt: $\sqrt{31} = [[5; \overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]]$. Welches Muster erkennen Sie? In den folgenden beiden Aufgaben soll geklärt werden, wie es allgemein um die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$, für $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat, bestellt ist.

**Aufgabe 3.4** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Hat $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ eine rein periodische Kettenbruchentwicklung der Form $\alpha = [[\overline{q_1, q_2 \ldots, q_m}]]$, mit Periodenlänge $m$, so hat $-1/\alpha'$ die rein periodische Kettenbruchentwicklung $-1/\alpha' = [[\overline{q_m, q_{m-1}, \ldots, q_1}]]$.

*Hinweis.* Setzen Sie $\beta = [[\overline{q_m, q_{m-1}, \ldots, q_1}]]$ und finden Sie geeignete $\sigma, \tau \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\sigma.\alpha = \alpha$ und $\tau.\beta = \beta$ dergestalt, daß $\sigma$ und $\tau$ transponiert zueinander sind. Folgern Sie dann, daß $\alpha$ und $-1/\beta$ dieselbe quadratische Gleichung über $\mathbb{Z}$ erfüllen.

Bitte wenden!

**Aufgabe 3.5** (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat, so ist die Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl $\alpha = (\sqrt{d} - \lfloor\sqrt{d}\rfloor)^{-1}$ rein periodisch.

*Hinweis.* Verwenden Sie ein geeignetes Kriterium aus der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie: Ist $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat, so weist die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ die folgende Symmetrie auf

$$\sqrt{d} = [[q_1; \overline{q_2, \ldots, q_n, 2q_1}]] = [[q_1; \overline{q_n, q_{n-1}, \ldots, q_2, 2q_1}]].$$

*Hinweis.* Beachten Sie (a) und wenden Sie entsprechend Aufgabe 3.4 an.

(c) Zeigen Sie: Umgekehrt stellt jeder Kettenbruch $\beta$ mit der in (b) beschriebenen Symmetrie eine irrationale Quadratwurzel $\sqrt{b}$, für geeignetes $b \in \mathbb{Q}$, dar.

*Hinweis.* Nach dem Satz von Euler–Lagrange ist $\beta = [[q_1; \overline{q_2, \ldots, q_n, 2q_1}]]$ eine quadratische Irrationalzahl, also von der Gestalt $\beta = x + y\sqrt{d}$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$ für ein geeignetes quadratfreies $d \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie $\alpha = (\beta - q_1)^{-1}$ und $-1/\alpha'$, um mit Hilfe von Aufgabe 3.4 zu folgern: $\beta = y\sqrt{d} = \sqrt{a}$ für $a = y^2 d \in \mathbb{Q}$.

*Bemerkung.* Das Beispiel $2/\sqrt{3} = [[1; \overline{6, 2}]]$ zeigt, daß wir in (c) nicht im Übereifer $a \in \mathbb{N}$ erwarten dürfen. .