Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 2

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 21.10.2024, ab 14.30 Uhr

Bitte reichen Sie Lösungen zu den Aufgaben 2.3 und 2.4 ein; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 2.1

(a) Berechnen Sie explizit die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{31}$.

(b) Bestimmen Sie die Zahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deren Kettenbruchentwicklung $[\![1; 2, 3, \overline{1, 4}]\!]$ ist.

Aufgabe 2.2

Folgern Sie mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachprinzips: Zu jeder reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und zu jedem $S \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ existieren $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq s < S$ dergestalt, daß $|s\alpha - r| \leq 1/S$ gilt. Folgern Sie: Ist α irrational, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen $r/s \in \mathbb{Q}$ (geschrieben als gekürzter Bruch: $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$) mit der Eigenschaft $|\alpha - r/s| < 1/s^2$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $\alpha = [\![q_1; q_2, \ldots]\!]$ und den zugehörigen Näherungsbrüchen $a_n = [\![q_1; q_2, \ldots, q_n]\!] = P_n(q)/Q_n(q) \in \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liefert wenigstens eine der beiden rationalen Zahlen a_n, a_{n+1} eine besonders gute Approximation von α, in dem Sinne, daß gilt:

$$|\alpha - r/s| < 1/(2s^2) \qquad \text{für geeignetes } (r, s) \in \{(P_k(q), Q_k(q)) \mid k \in \{n, n+1\}\}.$$

Hinweis. Nutzen Sie geeignete Abschätzungen aus der Vorlesung in Kombination mit der Ungleichung $\beta\gamma < \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2)$ für $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq \gamma$, die Sie leicht begründen können.

(b) Überlegen Sie weiter: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liefert wenigstens eine der drei Zahlen a_n, a_{n+1}, a_{n+2} eine noch bessere Approximation von α, nämlich

$$|\alpha - r/s| < 1/(\sqrt{5}s^2) \qquad \text{für geeignetes } (r, s) \in \{(P_k(q), Q_k(q)) \mid k \in \{n, n+1, n+2\}\}.$$

Hinweis. Argumentieren Sie per Widerspruch und setzen Sie $\lambda = Q_{n+1}(q)/Q_n(q) \in \mathbb{Q}$. Folgern Sie, indem Sie ähnlich wie in (a) vorgehen, zunächst $\lambda + \lambda^{-1} < \sqrt{5}$ und dann $\lambda < (1 + \sqrt{5})/2$. Zeigen Sie ebenso $\mu = Q_{n+2}(q)/Q_{n+1}(q) < (1 + \sqrt{5})/2$. Leiten Sie nun aus der Rekursionsgleichung $Q_{n+2}(q) = q_{n+2}Q_{n+1}(q) + Q_n(q)$ die Ungleichung $\mu \geq 1 + \lambda^{-1}$ und schließlich den gesuchten Widerspruch ab.

Bemerkung. Aus (b) ergibt sich der folgende Satz von Hurwitz: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen $r/s \in \mathbb{Q}$ (wieder geschrieben als gekürzter Bruch) mit der Eigenschaft $|\alpha - r/s| < 1/(\sqrt{5}s^2)$. Das Ergebnis ist sogar bestmöglich, in dem Sinne, daß hierbei $\sqrt{5}$ durch keine größere Zahl ersetzt werden kann; dies läßt sich anhand der „goldenen Schnittzahl“ $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = [\![1; \overline{1}]\!]$ feststellen.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, und $G = \mathrm{GL}_2(K)$ wirke auf $\Omega = P^1(K) = K \cup \{\infty\}$ von links mittels Möbiustransformationen:

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) . \alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \qquad \text{für } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K) \text{ und } \alpha \in P^1(K).$$

Weiter sei $H = \mathrm{SL}_2(K)$.

(a) Bestimmen Sie den Kern Z der Wirkung von G auf Ω sowie $H \cap Z$.

(b) Zeigen Sie, daß die Wirkung von G/Z auf Ω scharf 3-fach transitiv ist. D. h., für alle $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \Omega^3$, jeweils mit drei voneinander verschiedenen Einträgen, gibt es modulo Z genau ein $\sigma \in G$ mit $\sigma.\alpha_i = \beta_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Hinweis. Arbeiten Sie mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\infty, 0, 1)$.

(c) Zeigen Sie: H wirkt zumindest 2-fach transitiv auf Ω.

Zusatz. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an den Körper K dafür, daß $H/(H \cap Z)$ ebenfalls 3-fach transitiv auf Ω wirkt.

(d) Identifizieren Sie $U = \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in K\}$ und $V = \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid c \in K\}$ als Stabilisatoruntergruppen in H für geeignete Elemente von Ω. Zeigen Sie sodann: U und V sind in H konjugiert zueinander, abelsch und erzeugen gemeinsam ganz H.

(e) Für $|K| \geq 4$ ist H perfekt, d. h., es gilt $H = [H, H]$.

Hinweis. Berechnen und nutzen Sie, für $a, b \in K$ mit $a \neq 0$, den Gruppenkommutator

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}.$$

Bemerkung. Aus den oben erzielten Ergebnissen läßt sich mit Hilfe eines auf Iwasawa zurückgehenden Kriteriums[1] schlußfolgern, daß die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(K) = H/(H \cap Z)$ für $|K| \geq 4$ stets einfach ist, also keine nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

[1] vgl. Hilfssatz 6.12 in: B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, 1967.