Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Philip Möller
Wintersemester 2024–25

Zahlentheorie I – Blatt 1

Vorstellung/Abgabe der Lösungen in der Übungsstunde am 14.10.2024, ab 14.30 Uhr

Aufgaben 1.1 bis 1.5 sind Präsenzaufgaben für die erste Übungsstunde am 07.10.2024. Bitte bereiten Sie schriftliche Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben 1.6 und 1.7 bis zur Übungsstunde am 14.10.2024 vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenI_WS2425/`.

Aufgabe 1.1
Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2(1 + 2 + \ldots + n)^4.$$

Aufgabe 1.2
Zeigen Sie, daß für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ stets gilt:

$$\mathrm{ggT}\big(\mathrm{ggT}(a,b), c\big) = \mathrm{ggT}\big(a, \mathrm{ggT}(b,c)\big).$$

Wie verallgemeinert sich die Aussage für endlich viele anstelle von drei ganzen Zahlen?
Bemerkung. Entsprechend spricht man bisweilen von dem größten gemeinsamen Teiler von endlich vielen ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_m$.

Aufgabe 1.3
Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch die Vorgaben

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Berechnen Sie explizit die ersten sechzehn Folgenglieder $a_0, a_1, \ldots, a_{15}$.
Bestimmen Sie sodann $\mathrm{ggT}(a_n, a_{n+1})$, $\mathrm{ggT}(a_n, a_{n+2})$ und $\mathrm{ggT}(a_n, a_{n+3})$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 1.4
Die Fermatschen Zahlen sind definitionsgemäß die natürlichen Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Leiten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Identität $F_n = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2$ her, und folgern Sie aus dieser Rekursionsbeziehung, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 1.5
Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus alle ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$285\,X + 432\,Y = c, \qquad \text{jeweils für } c \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 1.6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine ganzzahlige Lösung der diophantischen Gleichung

$$35\,X + 55\,Y + 77\,Z = 1.$$

Zusatz. Können Sie sogar die vollständige Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ beschreiben?

Aufgabe 1.7 (4 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die (regelmäßigen) Kettenbruchentwicklungen der Quadratwurzelausdrücke $\sqrt{a^2+2a}$, $\sqrt{a^2+a}$, $\sqrt{a^2+2}$ sind:[1]

$$[[a;\overline{1,2a}]], \qquad [[a;\overline{2,2a}]], \qquad [[a;\overline{a,2a}]].$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b < 4a^2$. Zeigen Sie: $\sqrt{a^2+b}$ läßt sich als 'verallgemeinerter' Kettenbruch darstellen:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}.$$

Diskutieren Sie insbesondere die Konvergenz auf der rechten Seite der Identität.

Hinweis. Stellen Sie eine geeignete Fixpunktgleichung auf und wenden Sie dann den Banachschen Fixpunktsatz an.

(c) Bestimmen Sie die Kettenbruchenwicklung von $\sqrt{c}$ für $c \in \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$.

[1] Wie üblich bezeichnet $[[a;\overline{b,c}]]$ den gemischt periodischen Kettenbruch $[[a; b, c, b, c, b, c, \ldots]]$.