

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $f: S^2 \rightarrow S^2$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Zeigen Sie, dass f nullhomotop ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

- (i) Bestimmen Sie $H_3(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z})$. *Hinweis: Nutzen Sie $\mathbb{RP}^3/\mathbb{RP}^2 \cong S^3$.*
- (ii) Sei $f: S^3 \rightarrow S^3$ eine Abbildung, die $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in S^3$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $\deg f \in 2\mathbb{Z}$.
- (iii) Konstruieren Sie für jedes $n \in 2\mathbb{Z}$ eine Abbildung $f_n: S^3 \rightarrow S^3$ mit $f_n(x) = f_n(-x)$ für alle $x \in S^3$ und $\deg f_n = n$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Folgern Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz direkt aus dem Antipodensatz ohne Nutzung homologischer Argumente.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie Borelmengen $A_1, \dots, A_{n+1} \subset \mathbb{R}^n$, die nicht durch eine einzige affine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ jeweils im Maße halbiert werden können.