

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 8

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R -Mod.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass (E_*, ∂_*) gewöhnlich ist. Verwenden Sie die Mayer-Vietoris-Folge für Pushouts zur Berechnung von

- (i) $E_*(S^n)$,
- (ii) $E_*(T^2)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Verwenden Sie Ihre Resultate aus der ersten Aufgabe um zu zeigen, dass die Kollabierabbildung $S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$, welche $S^1 \vee S^1$ zu einem Punkt zusammenschlägt, nicht nullhomotop ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei X ein topologischer Raum. Wir wollen zeigen, dass es stets einen natürlichen Isomorphismus

$$E_*(X \times S^n) \cong E_*(X) \oplus E_{*-n}(X)$$

gibt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Finden Sie zunächst einen Isomorphismus $E_*(X \times S^n) \cong E_*(X) \oplus E_*(X \times S^n, X \times \{s_0\})$ für einen Punkt $s_0 \in S^n$.
- (ii) Nutzen Sie nun die Mayer-Vietoris-Folge, um $E_*(X \times S^n, X \times \{s_0\}) \cong E_{*-n}(X)$ zu zeigen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Wir nehmen nun wieder an, dass (E_*, ∂_*) gewöhnlich ist. Zeigen Sie $E_*(T^n) \cong E_0(\text{pt})^{\binom{n}{*}}$.