

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes X zusammen mit zwei Punkten $x, x' \in X$ an, sodass (X, x) wohlpunktiert ist und (X, x') nicht.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir betrachten die stetige Abbildung $f_n: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ für eine ganze Zahl n . Zeigen Sie, dass der davon induzierte Endomorphismus auf der ersten Homologie $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit n ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

In der Vorlesung haben wir die reduzierte singuläre Homologie $\tilde{H}_n(X) = \ker(H_n(X) \rightarrow H_n(\text{pt}))$ eines topologischen Raumes X eingeführt. Kann man diese auch als Homologie eines Kettenkomplexes definieren?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und $f: A \rightarrow Y$ mit Zerlegung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_f} & M_f \\ \downarrow f & \swarrow r_f & \\ Y & & \end{array} .$$

Betrachte die zwei Pushouts

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \lrcorner & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_f} & M_f \\ \downarrow i & \lrcorner & \downarrow j_f \\ X & \longrightarrow & \bar{Z} \end{array} .$$

Dann gibt es eine eindeutige Homotopieäquivalenz $c: \bar{Z} \xrightarrow{\sim} Z$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{i_f} & M_f \\ & \swarrow i & \downarrow \text{id}_A & \swarrow j_f & \downarrow r_f \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{Z} & & Y \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & A & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow i & & \swarrow j & \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z & & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image, which includes additional arrows like $\bar{i}_f$ and c .)

kommutiert.