

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Begründen Sie, dass man das Ausschneidungsaxiom auch wie folgt formulieren kann:

Sind A und B Unterräume eines topologischen Raumes X mit $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$, so sind die von der Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induzierten Abbildungen $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ Isomorphismen für alle ganzen Zahlen n .

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R -Mod. Zeigen Sie, dass $E_n(\emptyset) = 0$ ist für alle ganzen Zahlen n . Folgern Sie, dass auch stets $E_n(X, X) = 0$ ist für jeden topologischen Raum X .

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (X, A) ein Raumpaar. Zeigen Sie, dass die singuläre Homologie $H_1(X, A; R)$ genau dann trivial ist, wenn die von der Inklusion $A \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $H_1(A; R) \rightarrow H_1(X; R)$ surjektiv ist und keine Wegzusammenhangskomponente von X mehr als eine Wegzusammenhangskomponente von A enthält.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \lrcorner & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array}$$

ein Pushout in Top. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- i) Ist i die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums, so auch j und $X \setminus A \cong Z \setminus Y$.
- ii) Ist i eine Kofaserung, so auch j .