

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 4

Auf dem gesamten Blatt sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (5 Punkte):

- (i) Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen von R -Moduln, welcher auf der Homologie Nullabbildungen induziert, kettenhomotop zur Nullabbildung?
- (ii) Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen von R -Moduln, welcher auf der Homologie Isomorphismen induziert, eine Kettenhomotopieäquivalenz?

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Man nennt einen Kettenkomplex $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ von R -Moduln

- exakt oder azyklisch, falls $\ker(d_n^C) = \operatorname{im}(d_{n+1}^C)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.
- zusammenziehbar, falls der Identitätsmorphimus $\operatorname{id}_{C_\bullet}$ kettenhomotop zur Nullabbildung ist.

Sei nun $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von R -Moduln, aufgefasst als Kettenkomplex (wir füllen also mit Nullen auf). Zeigen Sie, dass ein solcher Kettenkomplex genau dann zusammenziehbar ist, wenn die kurze exakte Folge zerfällt.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei X ein topologischer Raum und sei m eine feste ganze Zahl.

- (i) Weisen Sie nach, dass die Multiplikation mit m einen Morphismus

$$\mu_m: C_\bullet^{\operatorname{sing}}(X) \rightarrow C_\bullet^{\operatorname{sing}}(X)$$

von Kettenkomplexen von $\mathbb{Z}$ -Moduln definiert.

- (ii) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl n eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(H_n^{\operatorname{sing}}(\mu_m; \mathbb{Z})) \longrightarrow H_n^{\operatorname{sing}}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow \ker(H_{n-1}^{\operatorname{sing}}(\mu_m; \mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen existiert.

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 4

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R -Mod und seien $X_1, \dots, X_r$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Inklusionen $i_j: X_j \rightarrow \coprod_{k=1}^r X_k$ der Summanden Isomorphismen

$$\bigoplus_{k=1}^r E_n(X_k) \rightarrow E_n(X)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ induzieren. Mit anderen Worten, Homologietheorien erhalten endliche Koprodukte.