

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir betrachten folgende exakte Folge von abelschen Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & F & & \\
 & & & \searrow 0 & & & \\
 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 & & \\
 & & & \searrow 0 & & & \\
 D & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longrightarrow & C & & \\
 & & & \searrow 0 & & & \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{0} & A & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0, & &
 \end{array}$$

wobei $\Delta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2, m \mapsto (m, m)$ die Diagonale ist. Bestimmen Sie die abelschen Gruppen A, B, C, D, E und F .

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in der Kategorie $R\text{-Mod}$ der R -Moduln. Sei zudem (X, A) ein Raumpaars so, dass es eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ gibt. Zeigen Sie, dass die lange exakte Homologiefolge des Raumpaars (X, A) in spaltenden kurzen exakten Folgen

$$0 \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow 0$$

resultiert, wobei n eine nicht-negative ganze Zahl ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

(i) Sei M ein fester R -Modul.

Folgern Sie, dass der Funktor $\text{Hom}_R(M, -)$ linksexakt ist, also exakte Folgen der Form $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ erhält und dass der Funktor $M \otimes_R -$ rechtsexakt ist, also exakte Folgen der Form $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ erhält.

Hinweis. Die folgenden Aufgaben sind relevant: Blatt 12 Aufgabe 4 (Aussage gilt auch für Moduln) und Blatt 14 Aufgabe 1 beide aus der Einführung in die Topologie und Blatt 2 Aufgabe 4 von letzter Woche.

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 3

- (ii) Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und M ein fester R -Modul.
- (a) Zeigen Sie, dass falls $R = K$ ein Körper ist, diese beiden Funktoren exakt sind.
 - (b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese beiden Funktoren im Allgemeinen nicht exakt sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

In der Vorlesung haben wir das Schlangenlemma behandelt. Zeigen Sie die Exaktheit an $\ker(h)$.