

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 2

Für das gesamte Blatt sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Weisen Sie nach, dass für jede R -lineare Abbildung $f: A \rightarrow B$ die Folge von R -Moduln $0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0$ exakt ist.

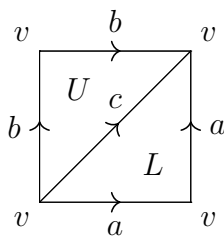
Aufgabe 2 (5 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$ -Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$.
- (ii) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$ -Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (iii) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Wir betrachten folgenden Δ -Komplex:



- (i) Begründen Sie kurz, dass dieser Δ -Komplex eine Kleinsche Flasche K ist und, dass der Unterkomplex L ein eingebettetes Möbiusband ist.
- (ii) Bestimmen Sie die simplizialen Homologiegruppen $H_*^\Delta(K; R)$, $H_*^\Delta(L; R)$ und $H_*^\Delta(K, L; R)$ für $R = \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{F}_2$.
- (iii) Geben Sie basierend auf Ihren vorherigen Berechnungen alle Gruppen und Gruppenhomomorphismen der langen exakten Homologiefolge des Δ -Paares (K, L) konkret an.

Topologie I, WiSe 25/26

Blatt 2

Aufgabe 4 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe arbeiten wir nur mit der Kategorie $R\text{-Mod}$ der R -Moduln und R -linearen Abbildungen. Sei zudem M ein fester R -Modul.

Zeigen Sie, dass eine Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ genau dann exakt ist, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C \end{array}$$

ein Pullback ist und dass dual eine Folge $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ genau dann exakt ist, wenn das Diagramm ein Pushout ist.