Übungsblatt 8

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Seien X, Y, Z Banachräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(Y, Z)$ und $\mathcal{S} \subset \mathscr{L}(X, Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, so auch $\mathcal{T}\mathcal{S}$ mit $\mathcal{R}(\mathcal{T}\mathcal{S}) \leqslant \mathcal{R}(\mathcal{T})\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

(b) Ist $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X, Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, so auch der Abschluss $\overline{\mathcal{T}}^s$ bezüglich der starken Operatortopologie mit $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{T}}^s) \leqslant \mathcal{R}(\mathcal{T})$.

[K] Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Sei $1 \leqslant p < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zu $\Phi \in L^\infty(G)$ sei $M_\Phi \in \mathscr{L}(L^p(G))$ definiert als Multiplikationsoperator

$$M_\Phi u := \Phi \cdot u, \quad u \in L^p(G).$$

Zeigen Sie, dass die Familie $\{M_\Phi : \Phi \in L^\infty(G), \|\Phi\|_{L^\infty(G)} \leqslant K\} \subset \mathscr{L}(L^p(G))$ für jedes $K > 0$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist mit

$$\mathcal{R}\{M_\Phi : \Phi \in L^\infty(G), \|\Phi\|_{L^\infty(G)} \leqslant K\} \leqslant 2K.$$

Aufgabe 8.3

Für $T \in (0, \infty]$, $1 \leqslant p < \infty$ und einen abgeschlossenen, dicht definierten Operator $A : D(A) \subset X \to X$ in einem Banachraum X ist $\mathbb{E}_T := W^{1,p}((0,T), X) \cap L^p((0,T), D(A))$. Zeigen Sie die Einbettung

$$\mathbb{E}_\infty \hookrightarrow BUC((0,\infty), I_p(A)).$$

Hinweis: Betrachten Sie den Operator $\tau_t : u(\cdot) \mapsto u(\cdot + t)$ auf $\mathbb{E}_\infty$ für $t \geqslant 0$, um die Einbettung nach $B([0,\infty), I_p(A))$ zu zeigen. Nutzen Sie anschließend für die gleichmäßige Stetigkeit aus, dass $C_c^\infty([0,\infty), D(A)) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathbb{E}_\infty$.

Abgabe bis zum Freitag, den 11. Juni 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.