

Modelltheorie II – Blatt 9  
Abgabe am 24.6.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

**Aufgabe 1 (2 Punkte):**

Sei  $K \models \text{HEN}_{0,0}$  (in der Sprache  $L_{\text{RV}}$ ), und sei  $X \subset \text{RV}_K^n$  eine definierbare Teilmenge (möglicherweise mit Parametern aus  $K$  und/oder  $\text{RV}_K$ ). Zeigen Sie, dass  $X$  bereits  $\text{RV}_K$ -definierbar ist (also nur mit Parametern aus  $\text{RV}_K$ ).

(Man sagt,  $\text{RV}_K$  ist *stabil eingebettet*.)

**Aufgabe 2 (2+3+2+1+2+1+2+1 Punkte):**

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass jeder henselsche Körper der Charakteristik  $(0,0)$  elementar äquivalent zu einem Körper einer bestimmten einfachen Form ist.

Sei  $k$  ein Körper und  $\Gamma$  eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren den *Hahn-Körper*  $K := k((t^\Gamma))$  als die Menge derjenigen formalen Summen der Form

$$a = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma t^\gamma,$$

für  $r_\gamma \in k$ , bei denen die *Träger-Menge*  $\text{supp}(a) := \{\gamma \in \Gamma \mid r_\gamma \neq 0\}$  wohlgeordnet ist. (D. h. jede Teilmenge  $M \subset \text{supp}(a)$  besitzt ein Minimum.)

Die Notation suggeriert, wie man eine Addition und eine Multiplikation auf  $K$  definieren soll, nämlich:

$$\left( \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma t^\gamma \right) + \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} r'_\gamma t^\gamma \right) := \sum_{\gamma \in \Gamma} (r_\gamma + r'_\gamma) t^\gamma \quad \text{und} \quad \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma t^\gamma \right) \cdot \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} r'_\gamma t^\gamma \right) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \left( \sum_{\lambda \in \Gamma} r_\lambda \cdot r'_{\gamma-\lambda} \right) t^\gamma$$

Wir definieren  $v: K^\times \rightarrow \Gamma$  durch  $v(a) := \min(\text{supp}(a))$ , und wir setzen  $v(0) := \infty$ ,  $\mathcal{O}_K := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$  und  $\mathcal{M}_K := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass diese Addition und Multiplikation auf  $K$  wohldefiniert sind, d. h. dass die Summe und das Produkt wieder in  $K$  liegen, und auch, dass bei der Multiplikation die inneren Summen über  $\lambda$  endlich sind.

$K$  wird auf diese Art zu einem Ring, und  $v$  erfüllt die Axiome einer Bewertung. Das zu beweisen ist langweilig, also dürfen Sie es im Folgenden einfach verwenden. Auch einfache Resultate über Bewertungen, die wir eigentlich nur für Körper bewiesen haben, können Sie schon in (b)–(f) verwenden.

- (b) Sei  $M \subset \Gamma$  gegeben. Wir betrachten eine „mit  $M$  indizierte Cauchy-Folge“  $(a_\lambda)_{\lambda \in M}$ , d. h. seien  $a_\lambda \in K$  für  $\lambda \in M$  so, dass für alle  $\lambda, \lambda' \in M$  mit  $\lambda < \lambda'$  gilt:  $v(a_\lambda - a_{\lambda'}) \geq \lambda$ .

Zeigen Sie, dass die Folge im folgenden Sinn konvergiert: Es existiert ein  $a \in K$ , so dass für alle  $\lambda \in M$  gilt:  $v(a_\lambda - a) \geq \lambda$ .

(Anmerkungen: Ein solcher Grenzwert  $a$  ist i. A. nicht eindeutig. Bewertete Körper, in denen (b) gilt, nennt man *sphärisch vollständig*.)

Hinweis: Sie können die Koeffizienten  $r_\gamma$  eines Grenzwertes  $a$  explizit mit Hilfe der Koeffizienten der  $a_\lambda$  angeben. Prüfen Sie, dass der Träger ihres  $a$  wohlgeordnet ist.

Für die Teilaufgaben (c)–(e) betrachten wir ein Polynom  $f = \sum_i c_i x^i \in \mathcal{O}_K[x]$  mit  $v(c_0) > 0$  und  $v(c_1) = 0$ , und wir setzen  $\Delta := \{v(f(a)) \mid a \in \mathcal{M}_K\}$ .

- (c) Zeigen Sie: Ist  $\infty \notin \Delta$ , so besitzt  $\Delta$  kein Maximum.  
Hinweis: Konstruieren Sie aus einem gegebenen  $a$  ein „besseres“  $a'$  (d. h. mit  $v(f(a')) > v(f(a))$ ), genau so, wie auch im Beweis von Hensels Lemma in der Vorlesung aus einem  $a_i$  ein besseres  $a_{i+1}$  konstruiert wurde.

- (d) Zeigen Sie: Für  $a, a' \in \mathcal{M}_K$  gilt  $v(f(a) - f(a')) = v(a - a')$ .

- (e) Zeigen Sie:  $\Delta$  besitzt ein Maximum.  
Hinweis: Wählen Sie für jedes  $\lambda \in \Delta$  ein  $a_\lambda$  mit  $v(f(a_\lambda)) = \lambda$ . Zeigen Sie mit Hilfe von (d), dass diese  $a_\lambda$  eine Cauchy-Folge im Sinne von (b) bilden. Betrachten Sie dann  $v(f(a))$ , wobei  $a$  ein Limes dieser Cauchy-Folge ist.

- (f) Folgern Sie: Sind  $f \in \mathcal{O}_K[x]$  und  $a \in \mathcal{O}_K$  mit  $v(f(a)) > 0$  und  $v(f'(a)) = 0$ , so besitzt  $f$  eine Nullstelle  $b \in K$  mit  $v(b - a) > 0$ .

(Anders ausgedrückt:  $K$  ist henselsch; wir wissen nur noch nicht, dass es ein Körper ist.)

- (g) Folgern Sie, dass  $K$  ein Körper ist: Zeigen Sie, dass es reicht, Inverse von Elementen  $a \in K$  mit  $v(a) = 0$  zu finden. Geben Sie für ein solches  $a$  explizit ein  $b$  an mit  $v(ab - 1) > 0$ . Benutzen Sie dann (f), um ein  $b'$  zu finden mit  $ab' - 1 = 0$ .

- (h) Zeigen Sie: Jedes Modell von  $\text{HEN}_{0,0}$  ist elementar äquivalent zu einem Hahn-Körper.

Sie dürfen dazu den Satz von Ax-Kochen/Ershov (Korollar 2.5.9 in der Vorlesung) verwenden.